

Universidad de La Habana  
Dpto. Física Aplicada

## El abc de las mediciones en el laboratorio docente

A. González Arias<sup>1</sup>  
abril 2009

[Magnitudes y patrones](#); [Instrumentos de medición e incertidumbres](#); [Clasificación de las incertidumbres](#); [La ley de propagación de incertidumbres. Formas simplificadas](#); [Cifras significativas](#); [Preguntas de control](#); [Bibliografía](#); [Anexo 1. Covarianza](#); [Anexo 2. Denominación de las magnitudes físicas](#).

### 1. MAGNITUDES Y PATRONES

**Magnitud** es todo lo que se puede medir. **Medir** significa comparar.

Una magnitud particular en proceso de medición se denomina **mesurando**.

En inglés se acostumbra utilizar *cantidad* (quantity) en vez de magnitud para designar tanto el mesurando como su valor numérico.

Cuando medimos cualquier magnitud como, por ejemplo, una longitud o la intensidad de una corriente eléctrica, en realidad estamos comparando esa magnitud específica –*el mesurando*– con alguna otra, que consideramos arbitrariamente como patrón. Al determinar una masa desconocida en la balanza, lo que hacemos es comparar esa masa con masas patrones (las "pesas" de la balanza). Estas pesas, a su vez, han sido comparadas (o calibradas) con algún patrón secundario. Al seguir la cadena de comparaciones se llega hasta la comparación con el **kilogramo patrón**, patrón universal de masa que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, cerca de París, adoptado mediante convenios internacionales.

De igual forma existen patrones para otras magnitudes, denominadas *fundamentales*, tales como el tiempo, la longitud y la temperatura.

Diferentes sistemas de unidades reconocen diferentes magnitudes fundamentales. El *Sistema Internacional de Unidades*, vigente en la mayoría de los países, considera sólo siete magnitudes fundamentales, a partir de las cuales se pueden derivar todas las restantes magnitudes. Las magnitudes fundamentales del Sistema Internacional de Unidades aparecen en la tabla siguiente.

MAGNITUD	PATRÓN	SÍMBOLO
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
temperatura	Kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad de la corriente	ampere	A
intensidad de la luz	bujía o candela	b - cd

---

<sup>1</sup> [arnaldo@fisica.uh.cu](mailto:arnaldo@fisica.uh.cu)

## 2. INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN E INCERTIDUMBRES

Todo objeto, equipo o aparato que pueda ser utilizado para efectuar una medición es un **instrumento de medición**. Con independencia de su complejidad y del tipo de magnitud que mida, cualquier instrumento se caracteriza por poseer alguna escala graduada (digital, de aguja, de cursor deslizante) que permite establecer la proporcionalidad entre la magnitud que deseamos medir y el correspondiente patrón.

Puede ser algo tan sencillo como una regla graduada, que permite medir distancias del orden de 1 milímetro, hasta algo tan complejo como un difractómetro de rayos X, que puede utilizarse para medir distancias del orden de 1 Angstrom ( $10^{-10}$  m).

El instrumento será más **sensible o preciso** en la medida que su escala sea capaz de detectar variaciones cada vez más pequeñas de la magnitud medida. El instrumento será más o menos **exacto** según sus valores estén en mayor o menor correspondencia con el valor real del mesurando, de acuerdo a la calibración realizada por el fabricante con el correspondiente patrón.

**Un instrumento puede ser muy sensible y a la vez poco exacto, al no estar su escala calibrada correctamente con relación al patrón.**

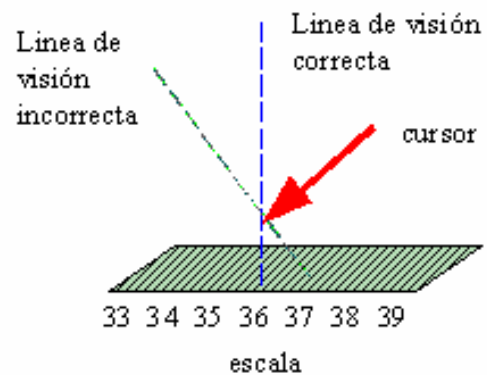
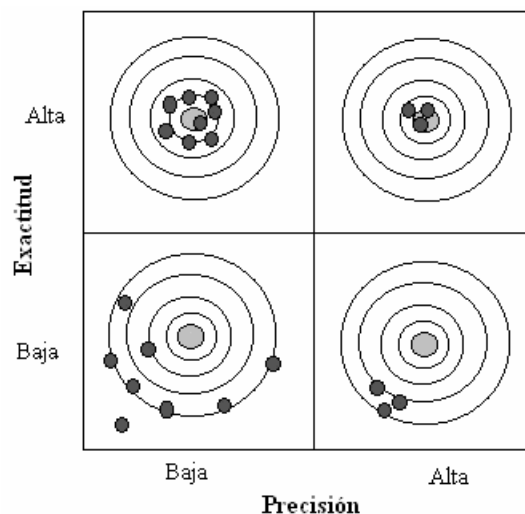
La medición como tal sera **precisa** cuando los valores obtenidos para el mesurando tengan poca dispersión. La figura ilustra perfectamente la diferencia entre precisión y exactitud, si asumimos que el valor real del mesurando coincide con el centro de la diana (ver figura). La figura sugiere que es posible obtener buena exactitud a partir de un instrumento con relativamente poca precisión (sección 3).

No hay mediciones exactas. Cualquier medición siempre estará afectada por una serie de **incertidumbres** de muy diverso origen, como por ejemplo:

- el límite de precisión establecido por el fabricante del instrumento (establecido al comparar contra el patrón)
- ignorar correcciones indicadas por el fabricante (por ejemplo, cuando la temperatura del laboratorio no coincide con la de calibración del instrumento).
- imprecisiones de manipulación del operador que hace la medición.
- variaciones de voltaje, campos magnéticos, presión, etc. que afecten el instrumento de medición.

**Error de paralaje.** Más que una incertidumbre, el **error de paralaje** es una equivocación causada por el desconocimiento o la mala manipulación por parte del operador que realiza la medición. Se origina por la falta de perpendicularidad de la visión al hacer la lectura de la escala en los instrumentos de aguja. En la figura, si el observador se coloca lateralmente a la escala, anotará un valor de 37.5 en vez del correcto 36.

**Error de entrada.** Una mala manipulación usual en los laboratorios docentes es la no verificación del cero del instrumento, denominado **error de entrada**: el instrumento no marca cero cuando la magnitud medida es nula (por ej., en una balanza). Ese valor ficticio se añadirá o restará posteriormente al del mesurando, introduciendo un error que puede llegar a ser significativo. El error de entrada se pue-



**Error de paralaje**

de eliminar verificando la posición del cero del instrumento antes de efectuar la medición.

**Omisión de correcciones.** Otro error bastante común en el laboratorio se relaciona con el uso de los termómetros de mercurio y alcohol. Los termómetros ordinarios de laboratorio vienen calibrados para inmersión total. Para que midan correctamente se deben introducir completamente en el sistema cuya temperatura se desea medir y esperar hasta que se alcance el equilibrio. No obstante, es posible utilizarlos con buena aproximación en inmersión parcial, pero en ese caso hay que *añadir* a la lectura  $T_0$  que marca el termómetro la fracción

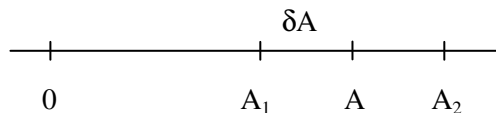
$$\delta T = 0.00016(\Delta T)(\Delta L)$$

donde  $\Delta L$  es la longitud de la columna de mercurio o alcohol que sobresale del sistema, expresada en unidades de la escala del termómetro, y  $\Delta T = T_2 - T_1$  la diferencia entre la temperatura  $T_2$  leída en la escala y la temperatura  $T_1$  del cuerpo del termómetro, medida con otro termómetro en el punto medio de la parte que sobresale. El no llevar a cabo esta corrección puede conducir a un error de varios grados, tanto mayor cuanto mayor sea la parte del termómetro que queda fuera del sistema objeto de medición.

**Error de medición.** Es usual utilizar este término para designar la diferencia que existe entre el valor medido y el valor real del mesurando, que normalmente se desconoce.

**Notaciones y términos.** Considere la medición de una magnitud  $M$  cualquiera.

A causa de la incertidumbre en la medición, sólo es posible aseverar que el valor de esa magnitud se encuentra en un cierto intervalo  $(A_1, A_2)$ .



Otra forma de representar esta situación es tomar el valor medio del intervalo,  $A = (A_1 + A_2)/2$ , como valor más probable, y la mitad de ese intervalo ( $\delta A$ ) como una medida de la incertidumbre en la medición;  $\delta A = (A_2 - A_1)/2$ . Entonces, el valor medido de la magnitud  $M$  y su incertidumbre se designan como

$$M = A \pm \delta A .$$

$\delta A$  se denomina *incertidumbre de la medición*, y también se suele indicar con la letra **u** ó **μ** (del inglés uncertainty).

**Ejemplo:**  $L = 2.54 \pm 0.02$  m significa que tenemos la certeza de que la longitud medida se encuentra entre 2.52 y 2.56 m (y esto es todo lo que podemos afirmar respecto a la magnitud medida).

**Incertidumbre relativa y porcentual** La *incertidumbre relativa* se define por la relación

$$\epsilon = \delta A/A$$

mientras que la *porcentual* es igual a la relativa multiplicada por 100.

La relativa representa la fracción de la imprecisión cometida en la medición, y resulta útil para comparar mediciones llevadas a cabo sobre diferentes magnitudes. Por ejemplo, usualmente una incertidumbre porcentual del 1% (lo que equivale a medir 100 m con incertidumbre de 1 m) es aceptable para mediciones que no requieran gran precisión. Si se desea disminuir este valor, será necesario hacer un esfuerzo mayor para lograr el resultado, y el esfuerzo será cada vez más importante mientras menor sea la incertidumbre deseada. Los valores más comunes de la incertidumbre porcentual en el laboratorio pueden oscilar entre 0.1 y 5%.

### 3. CLASIFICACION DE LAS INCERTIDUMBRES

De acuerdo al *método* utilizado para evaluar las incertidumbres, éstas se clasifican en dos clases o tipos

diferentes. **Las incertidumbres de tipo A** son las que se pueden determinar exclusivamente a partir del análisis estadístico de un conjunto de observaciones individuales. **Las incertidumbres de tipo B** son aquellas en la que influyen factores diferentes a los puramente estadísticos y que usualmente no pueden ser modificadas por el operador, como por ejemplo:

- especificaciones del fabricante del instrumento y calibración previa.
- incertidumbres de los patrones tomadas como referencia en los manuales o en los certificados del buró de standards.
- experiencias previas acerca del comportamiento de los instrumentos
- datos de mediciones anteriores.

**Incetidumbres tipo A.** Las incertidumbres de tipo A se determinan a partir de cualquier método matemático válido para analizar datos estadísticos. En lo que sigue nos referimos exclusivamente a los resultados que proporciona la distribución de Gauss, aunque en ocasiones se obtienen resultados más cercanos a la realidad aplicando otras distribuciones (por ej., la distribución de Student cuando N es pequeño).

Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  los valores obtenidos al realizar N mediciones sucesivas de la magnitud x, que pueden coincidir o no. Si no coinciden, esto es un índice de que hubo factores fortuitos o accidentales influyendo en los resultados. Se toma entonces como "**mejor valor**", o valor estimado del mesurando x el promedio aritmético o valor medio de los N valores,

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i ,$$

y como **incertidumbre estándar** ( $\mu$ ) de ese mejor valor se toma la desviación standard del valor medio,

$$\mu = \left( \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)^{1/2} . \quad (3.1)$$

La incertidumbre estándar  $\mu$  representa la probabilidad de que el valor medido se encuentre dentro del intervalo  $\bar{x} \pm \mu$  con un 68% de probabilidad. La probabilidad aumenta al 95% para el intervalo  $\bar{x} \pm 2\mu$ .

El parámetro  $\mu$  se suele multiplicar por algún otro factor cuando se desea especificar un intervalo diferente al 68% ó 95% (ver sección 4). Ese factor varía en dependencia de la distribución estadística asumida; por ejemplo, es mayor para la distribución de Student, válida cuando el conjunto de datos es pequeño.

Es posible comprobar que  $\mu$  decrece cuando N aumenta. De aquí que **llevando a cabo un número suficiente de mediciones es posible reducir tanto como se quiera la incertidumbre de tipo A** (asumiendo que la validez del método estadístico utilizado para analizar los datos es estrictamente cierta).

Se acostumbra reportar el valor medido de la magnitud x como  $x = \bar{x} \pm \mu$ .

La incertidumbre  $\mu$  aún se indica en muchos textos como  $\delta\bar{x}$  y la denominan error absoluto.

$$x = \bar{x} \pm \delta\bar{x} .$$

El procedimiento anterior no es aplicable a las incertidumbres del tipo B. Así, por ejemplo, la incertidumbre causada por el valor de un parámetro tomado de un manual no se puede eliminar incrementando el número N de mediciones.

En el análisis estadístico, el término  $\sigma = \sqrt{N}\mu$  se denomina *varianza*, *desviación típica* o *desviación standard*, y es igual a la probabilidad de que al hacer una nueva medición **individual** se obtenga un valor comprendido en el intervalo  $\bar{x} \pm \sigma$  con un 68% de probabilidad.

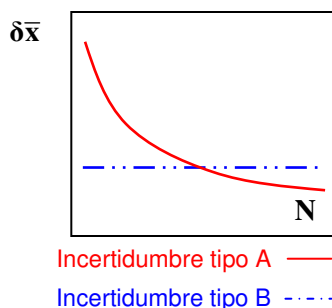
**Incertidumbres tipo B.** La incertidumbre tipo B proviene de una fuente externa, ajena a las posibles correcciones y manipulaciones que se puedan llevar a cabo en el laboratorio. La *apreciación* de un instrumento es la menor división de su escala. Mientras más pequeño sea el valor de esa menor división, mayor será la sensibilidad del instrumento y menor su contribución a la incertidumbre de la medición. La sensibilidad es invariable y propia del instrumento, y la incertidumbre que introduce en la medición no puede ser reducida en forma alguna en el laboratorio, pues es una medida de la incertidumbre introducida por el fabricante al comparar las lecturas de su instrumento con los patrones correspondientes.

En muchas ocasiones la incertidumbre del instrumento no coincide exactamente con la apreciación o menor división de su escala, sino que aumenta proporcionalmente con el valor medido en un por ciento determinado. De aquí que siempre resulte adecuado consultar el manual del fabricante del instrumento para conocer la verdadera incertidumbre que éste introduce y establecer un valor de  $\mu$  mas acorde a la realidad.

Cuando no se posee el manual del fabricante, es usual tomar el valor de la menor división de instrumento como una medida de la incertidumbre. En este caso, si  $x_0$  es el resultado de una sola medición de un mesurando  $x$  y  $\delta x_0$  el valor de la menor división de la escala, el valor a reportar será

$$x = x_0 \pm \delta x_0 .$$

**Incertidumbres conjuntas tipos A y B.** En estos casos es necesario analizar cada caso particular por separado, tomando como incertidumbre la mayor de todas las que se presenten. Por ejemplo, si al medir una magnitud eléctrica con un multímetro de aguja las fluctuaciones de voltaje de la línea causan variaciones en las lecturas por encima de la sensibilidad reportada por el fabricante, se debe hacer una medición de tipo A para eliminar la influencia de las fluctuaciones, asignando a la incertidumbre el valor proporcionado por la expresión (3.1). Pero si  $N$  se toma suficientemente grande, y el valor proporcionado por (3.1) resulta ser menor que la incertidumbre proporcionada por el fabricante, se tomará entonces éste último valor para  $\mu$  (ver figura).



#### 4. LA LEY DE PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRES. FORMAS SIMPLIFICADAS.

Una medición como la descrita en la sección 3 es una medición *directa*, mientras que si es necesario utilizar alguna fórmula o expresión matemática del tipo  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  para determinar el valor de la magnitud medida, la medición es entonces *indirecta*. (Por ejemplo, medir el área de una superficie a partir de su largo (a) y ancho (b):  $S = ab$ ).

En las mediciones indirectas es necesario tomar en cuenta las contribuciones individuales de cada incertidumbre  $\mu_i$  para calcular la incertidumbre total  $\mu_T$ . La incertidumbre total se calcula a partir de la expresión

$$\mu_T = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \mu_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mu_{ij} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

que no es más que un desarrollo truncado de Taylor de la expresión  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , donde  $n$  es el número de variables involucradas en la expresión.

Los coeficientes  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$  se denominan *coeficientes de sensibilidad*, y se evalúan en los correspondientes valores medios  $\bar{x}_i$ . El término  $\mu_{ij}$  es la *covarianza*<sup>1</sup> asociada a  $\bar{x}_i$  y  $\bar{x}_j$ . Sin embargo, la propagación de incertidumbres se reduce a expresiones más sencillas en muchos casos importantes.

Si se puede asumir razonablemente que los valores medios  $\bar{x}_i$  no están relacionados entre sí, el segundo término se anula. Entonces:

A) Si la fórmula de trabajo es una suma del tipo

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots$$

donde los  $a_i$  son constantes, la incertidumbre combinada o total  $\mu_T$  tendrá la forma

$$\mu_T = (a_1^2\mu_1^2 + a_2^2\mu_2^2 + a_3^2\mu_3^2 + \dots + a_n^2\mu_n^2)^{1/2}.$$

B) Cuando la fórmula de trabajo es un producto del tipo

$$y = Cx_1^p x_2^q x_3^r \dots x_n^z$$

la incertidumbre total relativa toma la forma

$$\mu_{Tr} = (p^2\mu_{1r}^2 + q^2\mu_{2r}^2 + r^2\mu_{3r}^2 + \dots + z^2\mu_{nr}^2)^{1/2}$$

donde  $\mu_{ir}$  es la *incertidumbre relativa*, definida por la expresión  $\mu_{ir} = \frac{\mu_i}{\bar{x}_i}$ .

Asumiendo una distribución Gaussiana de valores, es posible considerar que el valor real  $y_o$  de la magnitud medida  $y$  se encontrará en el intervalo  $(y_o + \mu_T)$   $(y_o - \mu_T)$  con un 68 % de probabilidad, lo que se acostumbra expresar como

$$y = y_o \pm \delta y_o,$$

donde  $\delta y_o \equiv \mu_T$ .

Si se toma como incertidumbre  $\delta y_o = 2\mu_T$  entonces la probabilidad se eleva al 95%. En general, al multiplicar  $\mu_T$  por un determinado factor ( $k$ ) denominado *factor de cobertura* se obtiene un cierto *intervalo de confianza* dentro del cual se puede asumir que el verdadero valor de  $y$  está contenido con esa probabilidad.

En general, el producto  $\delta y_o = k\mu_T$  se denomina *incertidumbre expandida*. Cuando  $k = 3$  el intervalo de confianza es mayor del 99%. En función de la incertidumbre expandida,

$$Y = y \pm k\mu_T.$$

Notar que (4.1) y las expresiones derivadas son válidas exclusivamente para propagar la incertidumbre en mediciones indirectas, y no son aplicables a mediciones directas donde haya contribuciones de errores de tipo A y B conjuntamente, ya analizados en la sección 3.

## 5. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

De acuerdo a lo expresado en las secciones anteriores, se concluye inmediatamente que carece de sentido escribir más cifras después del punto decimal que las estrictamente necesarias para indicar el valor de una magnitud. Por ejemplo, si se midió una densidad con una incertidumbre de  $0.0032 \text{ g/cm}^3$ , no tiene sentido escribir más allá de 3 ó 4 cifras después del punto decimal:

<sup>1</sup> ver anexo 1

$$\rho = 0.987643 \quad (\text{incorrecto})$$

$$\rho = 0.9876 \quad (\text{correcto})$$

En el primer caso, las dos últimas cifras (43) sobran, pues el resultado de la medición sólo permite afirmar que el valor de la densidad se encuentra en el intervalo

$$\rho = 0.9876 \pm 0.0032$$

es decir, que su valor real se encuentra entre 0.9843 y 0.9907.

Excepto en el caso de mediciones de alta precisión, se acepta comúnmente utilizar una sola cifra significativa para la incertidumbre total o absoluta, redondeando por aproximación. Igualmente se debe aproximar el valor de la magnitud medida para que las cifras significativas no sobrepasen el intervalo de incertidumbre. En nuestro ejemplo,  $0.0032 \approx 0.003$  y el valor a reportar será

$$\rho = 0.988 \pm 0.003 \text{ g/cm}^3.$$

En los libros de texto muchas veces se omite este tipo de notación, y la incertidumbre absoluta se indica solamente especificando el número de cifras significativas con que se expresa la magnitud. Es decir, si se reporta una densidad con el valor de  $\rho = 0.98$ , se sobreentiende que la misma se midió con una incertidumbre absoluta no mayor de 0.01. Sin embargo, si se reporta el valor 0.980, esto indica que la incertidumbre fue 10 veces menor (0.001).

## BIBLIOGRAFIA

1. Essentials of expressing measurement uncertainty, <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/basic.html> (visto en abril 2009)
2. A. González Arias, Errores y mediciones, Ed. Científico Técnica, 1983.

## PREGUNTAS DE CONTROL

1. Enumere los tipos o clases de incertidumbre que Ud. conoce y diga sus principales características
2. ¿Cuándo es precisa una medición? ¿Cuándo es exacta?
3. ¿Que diferencia hay entre error, equivocación e incertidumbre?
4. ¿Qué significado tienen la incertidumbre relativa y porcentual?
5. ¿Cómo se calcula la desviación típica? ¿Cuál es su significado?
6. De los tipos de incertidumbre y errores o equivocaciones que Ud. conoce, diga cuales pueden eliminarse y cuales no, y de que forma.
7. Explique en que consiste la ley de propagación de la incertidumbre
8. ¿Cómo expresa Ud. el resultado de una medición con un intervalo de confianza del 95%?

## ANEXO 1

El **análisis de la covarianza** es una técnica estadística que, utilizando un modelo de regresión lineal múltiple, busca comparar los resultados obtenidos en diferentes grupos de una variable cuantitativa, pero corrigiendo las posibles diferencias existentes entre los grupos en otras variables que también pudieran afectar al resultado (covariantes). En el estudio conjunto de dos variables, lo que interesa principalmente es saber si existe algún tipo de relación entre ellas. Esto se ve gráficamente con el diagrama de dispersión. La covarianza  $S(x,y)$  de dos variables aleatorias  $x,y$  se define como:

$$S_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

1. Una covarianza positiva significa que existe una relación lineal directa entre las dos variables. Es decir, las puntuaciones bajas de (x) se asocian con las puntuaciones bajas de (y), mientras que las puntuaciones altas de (x) se asocian con los valores altos de (y).
2. Una covarianza de negativa significa que existe una relación lineal inversa. Las puntuaciones bajas en (x) se asocian con los valores altos en (y), y viceversa.
3. Una covarianza 0 indica que no existe relación lineal entre las dos variables.

**Gaceta Oficial de la República de Cuba**  
**EXTRACTO DEL DECRETO-LEY NUMERO 62**  
**DE LA IMPLANTACION DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES**  
**La Habana, Jueves 30 de Diciembre de 1982.**

1. Notar que nombres y símbolos se escribe con minúscula *excepto los símbolos que se refieren a apellidos* (A, K, V, Hz, C, F, S, H, y T). Se debe seguir la regla general en las unidades que no aparecen reguladas en el decreto ley; newton (N), joule (J), watt (W).
2. Los nombres no se pluralizan para evitar equivocaciones con el segundo (s). Se escribe '10 kelvin' o '10 K', pero no '10 kelvines' (o 10 volts).
3. ARTICULO 13.-En todo documento legal, comercial, económico, administrativo, científico, técnico o informativo para uso en el país que requiera de la mención o utilización de unidades de medida se emplearán las unidades del SI. Siempre que sea necesario el uso de unidades de medida no pertenecientes al SI en virtud de las excepciones establecidas en este Decreto-Ley, se indicará entre paréntesis sus equivalencias en unidades de medida del SI. De igual manera se procederá cuando se trate de documentos con destino al extranjero y cuando fuere solicitado por parte interesada.

<b>UNIDADES BASICAS DEL SI</b>		
<b>Magnitud física</b>	<b>Nombre</b>	<b>Símbolo</b>
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de la corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mole	mol
Intensidad luminosa	candela	cd
<b>UNIDADES SUPLEMENTARIAS</b>		
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereorradián	sr
<b>UNIDADES DERIVADAS</b>		

Frecuencia (de un proceso periódico)	hertz	Hz
Cantidad de electricidad carga eléctrica	coulomb	C
Potencial eléctrico	volt	V
Capacitancia, capacidad eléctrica	farad	F
Resistencia eléctrica	ohm	$\Omega$
Conductancia	siemens	S
Inductancia	henry	H
Inducción magnética	tesla	T
Flujo luminoso	lumen	lm
Iluminación	lux	lx

**NO CONTEMPLADAS EN EL DECRETO LEY**

Fuerza	newton	N
Trabajo, energía	joule	J
Potencia	watt	W