Capítulo 2. Potencial y Capacidad

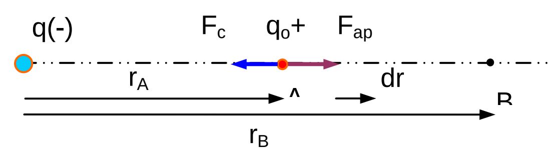
2.1 Energía Potencial Electrostática

Al igual que las fuerzas gravitatorias y elásticas, las fuerzas electrostáticas son *conservativas*. El trabajo realizado por ellas es independiente de la trayectoria; por tanto, se les puede asociar una energía potencial, tal como sucede con la energía potencial gravitatoria o la elástica. De los cursos de mecánica es conocido que la *variación* de energía potencial se puede definir a partir de la siguiente expresión:

$$E_p(B) - E_p(A) = \int_A^B \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r}$$

donde la fuerza aplicada $\vec{F}_{ap}$ se define de forma tal que en todo momento es igual y opuesta a la correspondiente fuerza conservativa: $\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_c$. La integral se calcula trabajando en contra de la fuerza conservativa.

Para calcular la energía potencial asociada a una carga puntual en el campo de fuerzas originado por la presencia de otra, consideremos la figura siguiente. La carga en el origen es negativa, mientras que la carga de prueba es positiva, y la fuerza de atracción viene dada por la ley de Coulomb:



$$F = k\frac{qq_o}{r^2} .$$

Aplicando la definición:

$$Ep(B) - Ep(A) = \int_A^B F_{ap}\cos\theta dr = kqqo\int_A^B \frac{dr}{r^2} = kqqo - \frac{1}{r}\Big]_A^B$$

$$E_p(B) - E_p(A) = -k\frac{qq_o}{r_B} - \left(-k\frac{qq_o}{r_A}\right)$$

Comparando los términos a la izquierda y la derecha de la expresión anterior se llega inmediatamente a la conclusión de que la función energía potencial tiene la forma

$$Ep(r) = -k\frac{qq_o}{r}$$

- Note la analogía con la energía potencial gravitatoria: $E_p = - G\frac{Mm}{r}$
- Si la carga ubicada en el origen fuera positiva en vez de negativa, se obtendría una expresión casi idéntica, con la única diferencia de que ahora la energía potencial sería positiva en vez de negativa. Analizando las 4 posibles combinaciones de signos de las cargas q y q_o: ++, +-, -+ y --, se llega rápidamente a la conclusión de que para obtener el valor correcto, basta con sustituir el valor numérico de las cargas *con su signo*[1] en la expresión general

$$\boxed{Ep(r) = k\frac{qq_o}{r}} \qquad (2.1.1.)$$

- La demostración se dedujo en una dimensión para simplificar los cálculos, pero el resultado es válido cualquiera sea la trayectoria tridimensional que recorra la carga desde el punto A hasta el B.
- La energía potencial no está asociada a una carga particular. Se puede hablar tanto de la energía de q_o en el campo de fuerzas de q, como de la energía de q en el campo de fuerzas de q_o, como de la

1 Note que la energía potencial es un escalar, a diferencia de la intensidad de campo, que es un vector.

energía del sistema de cargas.

- Cualquier distribución de cargas se puede reducir a una suma de cargas puntuales. Como la suma de fuerzas conservativas es también una fuerza conservativa, se llega rápidamente a la conclusión de que cualquier fuerza de origen electrostático siempre puede ser asociada a una energía potencial. (Aunque la expresión analítica correspondiente puede llegar a ser mucho más compleja que (2.1.1))

2.2 Potencial Electrostático

Se define la *diferencia de potencial* entre dos puntos A y B cualesquiera en el espacio por la expresión

$$V_B - V_A = \frac{\Delta E_p}{q_o} \qquad (2.2.1)$$

donde q_o es nuestra conocida carga de prueba positiva. Como el trabajo de la fuerza conservativa es igual a la variación negativa de la energía potencial y el trabajo de la fuerza aplicada W_{ap} es igual al de la fuerza conservativa con signo cambiado, una definición alternativa de potencial es la siguiente:

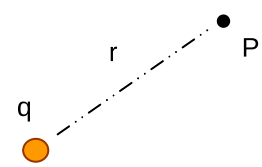
$$V_B - V_A = \frac{W_{ap}}{q_o} \qquad (2.2.2)$$

Ejemplo: *Potencial asociado a una carga puntual*

Combinando las expresiones (2.1.1) y (2.1.2) se ve inmediatamente que es posible escribir

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{q_o}$$

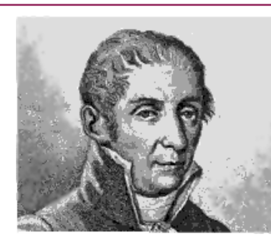
$$\boxed{V(r) = k\frac{q}{r}}$$



Este es el potencial asociado a la carga q a una distancia r. Se justificará más adelante que representa el *trabajo por unidad de carga necesario para traer la carga de prueba desde el infinito hasta el punto* en cuestión.

Unidades. $[V] = [E_p]/[q] = J/C = V$ (volt). 1 volt es la energía que hay que gastar por cada coulomb que se trae desde el infinito hasta una distancia de un metro de una carga de 1 coulomb.

***Alessandro Volta*,** (1745-1827), físico italiano. Se le conoce por crear la primera pila eléctrica, la llamada *pila de Volta o pila voltaica*. La pila voltaica aprovecha la electricidad de una reacción química espontánea para generar una diferencia de potencial entre dos electrodos sumergidos en disoluciones diferentes. Volta era profesor universitario de física y realizó numerosas contribuciones a la ciencia. Por sus trabajos en el campo de la electricidad Napoleón le nombró conde en 1801. La unidad de potencial eléctrico, el volt, se llama así en su honor.



2.3 Potencial e Intensidad de Campo

Considere la ecuación (2.2.2). Si se sustituye W_{ap} por la integral correspondiente se obtiene:

$$V_B - V_A = \frac{W_{ap}}{q_o} = \frac{1}{q_o}\int_A^B \vec{F}_{ap} \cdot d\vec{r} \qquad (2.3.1)$$

Expresando la fuerza aplicada en función de la intensidad de campo y simplificando; $\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_c = -q_o\vec{E}$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad (2.3.2)$$

Esta expresión permite calcular el potencial si se conoce la distribución de la intensidad de campo, aunque se desconozca la distribución de las cargas en el espacio.

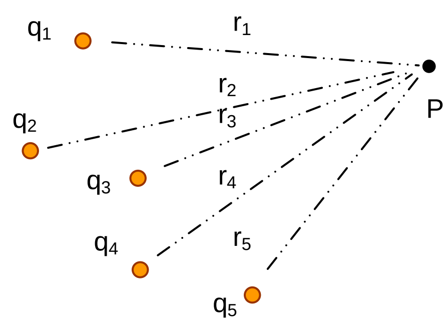
En forma similar a como ocurre con la energía potencial, usualmente interesa conocer la *diferencia de potencial*, y no el valor absoluto del potencial en un punto. No obstante, este último valor se puede calcular si se toma en cuenta que para la carga puntual el potencial tiende a cero a medida que r tiende a infinito. Generalizando y tomando el potencial electrostático igual a cero en el infinito, haciendo $V_A = 0$ cuando $A \to \infty$ en la expresión anterior y sustituyendo el punto B por otro P cualquiera para indicar mayor generalidad, se obtiene finalmente,

$$V_P = -\int_\infty^P \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Esta última expresión representa el trabajo por unidad de carga que es necesario hacer, trabajando en contra de la fuerza conservativa, para traer la carga de prueba q_o desde el infinito hasta el punto P. Comparando con (2.3.1) se comprueba fácilmente que también puede ser escrita como

$$Vp = \frac{W_{ap}(\infty \to P)}{q_o} \qquad (2.3.3)$$

2.4 Potencial Asociado a un Grupo de Cargas Puntuales



Se desea calcular el potencial en el punto P asociado al grupo de cargas puntuales $q_1 \ldots q_N$. Si se coloca una carga de prueba $q_o(+)$ en el punto P, q_1 ejercerá una fuerza F_1, q_2 otra F_2, y así sucesivamente. En este caso

$$\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_c = -\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

De los cursos de mecánica es conocido que el trabajo de la resultante es igual a la suma de los trabajos realizados por las fuerzas individuales. Por tanto,

$$W_{ap} = W_{ap}(1) + W_{ap}(2) + \ldots W_{ap}(N)$$

Dividiendo los términos por la carga de prueba q_o y aplicando la definición (la carga de prueba se mueve desde el infinito al punto P):

$$V(P) = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_N$$

$$V(P) = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2} + \ldots + k\frac{q_N}{r_N}$$

$$V(P) = k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

El potencial en el punto P es la suma algebraica de los potenciales asociados a cada carga. Note que el resultado anterior indica que es necesario considerar el signo (+) o (-) de cada carga durante la sumatoria.

2.5 Relación Inversa entre Potencial e Intensidad de Campo

Consideremos primeramente el movimiento en una dimensión, a lo largo del eje x. La expresión (2.3.2) queda entonces como

$$V_B - V_A = -\int_A^B E dx$$

De acuerdo a la definición de integral, lo que está dentro de la integral es el diferencial de la función potencial V. Por tanto, es posible escribir dV = - Edx, y también

$$\boxed{E = -\frac{dV}{dx}}$$

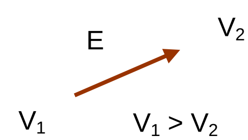
La derivada respecto a la posición (d/dx) se denomina *gradiente*, y la expresión anterior indica que la intensidad de campo es igual al gradiente del potencial. Note que, según esta expresión, el vector $\vec{E}$ siempre va dirigido de la región de mayor potencial a la de menor potencial.

dV/dx < 0 $\Rightarrow$ V decrece al aumentar x $\Rightarrow$ E > 0

Cuando el problema se analiza en tres dimensiones, se obtiene para la intensidad de campo la siguiente expresión:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

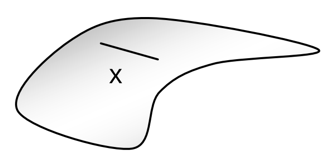
$$\vec{E} = -\nabla V$$



Donde el símbolo ∇se denomina *operador gradiente*. Así, la intensidad de campo resulta ser igual al gradiente negativo del potencial. Se puede demostrar que $\vec{E}$ está orientado en el espacio en la dirección de *máxima variación* del potencial.

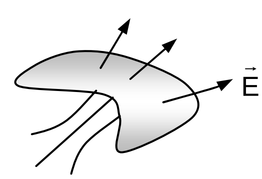
2.6 Superficies equipotenciales

Una superficie equipotencial es una superficie, real o imaginaria, que pasa por todos los puntos del espacio que tienen un mismo valor del potencial. Considere una superficie equipotencial cualquiera, y un segmento de recta de longitud x sobre esa superficie, como se ve en la figura adjunta. Calculando la intensidad de campo E sobre la recta, como el potencial es constante sobre la superficie, tendremos:



$$E_{||} = - dV/dx = 0.$$

Significa que sobre la superficie equipotencial no puede haber componentes de la intensidad de campo y las líneas de fuerza serán siempre perpendiculares a la superficie equipotencial.

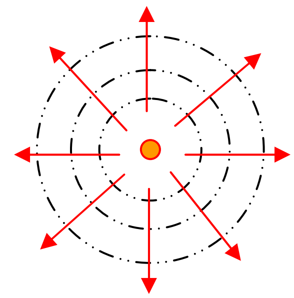


La intensidad de campo es siempre perpendicular a la superficie equipotencial

Por otra parte, en el capítulo 1 se demostró que, en el caso de un conductor cargado, las líneas de fuerza eran perpendiculares a la superficie. A partir de aquí se llega fácilmente a la conclusión de que:

La superficie de cualquier conductor es una superficie equipotencial.

Efectivamente, como la componente de $\vec{E}$ es cero sobre la superficie del conductor, entonces $\Delta V = -\int E dx = 0$ cualesquiera sean los puntos inicial y final considerados, y todos los puntos de la superficie están al mismo potencial.

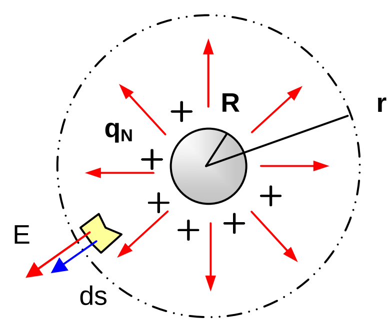


Como ejemplo de superficie equipotencial se pueden analizar las superficies asociadas a una carga puntual. El potencial de una carga puntual tiene la forma $V = kq/r$. Para todos los puntos que estén a la misma distancia r de la carga, V = constante. El lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia r es una esfera; por tanto, las superficies equipotenciales serán *esferas concéntricas*, con centro en la carga q.

2.7 Potencial Asociado a una Esfera Conductora Cargada

Para calcular el potencial asociado a una esfera conductora cargada de radio **R**, ante todo es necesario conocer la distribución de la intensidad de campo $\vec{E}$, y después utilizar esa distribución para calcular el potencial según la definición (2.3.2).

Cálculo de la Intensidad de Campo



superficie gaussiana
esférica de radio **r**

Dentro de cualquier conductor metálico E = 0. Por tanto, dentro de la esfera (r < R) la intensidad de campo es nula.

Fuera de la esfera, como la superficie es equipotencial, $\vec{E}$ será perpendicular a la superficie. El sentido es saliendo de la esfera, suponiendo que la carga en exceso es positiva, como se ve en la figura. El valor modular se puede obtener aplicando el teorema de Gauss, tomando una superficie gaussiana esférica, de radio r > R. Integrando sobre al superficie gaussiana, tendremos

$$\oint_S E\cos\theta ds = \frac{q_N}{\varepsilon_o}$$

$\vec{E}$ y $d\vec{s}$ forman ángulo de 90^0 en todos los puntos de la superficie gaussiana, por tanto $\cos\theta = 1$. Considerando la simetría del problema, se llega a la conclusión de que E debe ser constante sobre la superficie de integración, ya que un observador situado sobre la superficie gaussiana no notará diferencia alguna en los alrededores cuando el sistema rote alrededor del centro de la esfera metálica. Por tanto, sacando E fuera de la integral:

$$E\oint_S ds = ES = \frac{q_N}{\varepsilon_o}$$

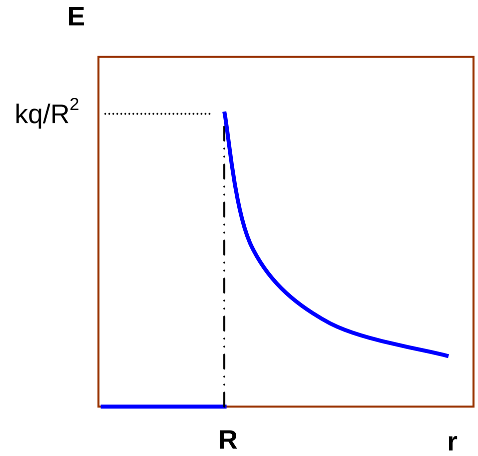
El área superficial de una esfera es $S = 4\pi r^2$. Recordando que $k = 1/4\pi\varepsilon_o$ y sustituyendo, se obtiene finalmente,

$$\boxed{E = k\frac{q}{r^2}} \qquad (r > R)$$

Esta expresión es idéntica a la del campo asociado a una carga puntual de carga q colocada en el centro de la esfera. Significa que

cuando r > R la esfera cargada se comporta como una carga puntual.

Si se hace un gráfico de la intensidad de campo en función de la distancia al centro de la esfera, se obtiene algo similar a lo que aparece en la figura. La función E(r) presenta una discontinuidad cuando r = R, debido a que el potencial cae desde su valor máximo en la superficie hasta cero, en el interior de la esfera, en una distancia muy pequeña. Esta distancia es del orden atómico, imposible de ser representada a escala gráficamente, pues el tamaño de los portadores de carga es del orden atómico-molecular.

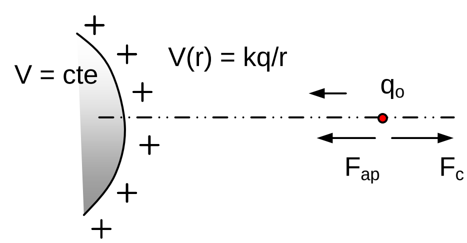


Cálculo del Potencial

Si la esfera se comporta como una carga puntual para r > R, el potencial asociado será necesariamente idéntico al de la carga puntual. De aquí que, fuera de la esfera,

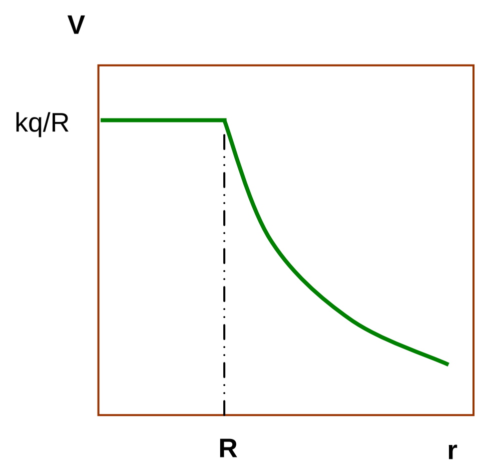
$$V(r) = k\frac{q_N}{r} \qquad (2.6.1)$$

Dentro de la esfera E = 0, y como E = - dV/dx., si E = 0 entonces V = constante. Esa constante no tiene por qué ser cero necesariamente. Para calcular el valor de V dentro de la esfera, considere lo siguiente. Según la definición de potencial, ec. (2.3.3):



$$V(r) = \frac{W_{ap}(\infty \to r)}{q_o}\,.$$

Para calcular el potencial dentro de la esfera debemos tomar una carga de prueba y traerla desde el infinito hasta dentro de la esfera, trabajando en contra de la fuerza eléctrica (ver figura). El valor de esta integral es justamente kq/r, y su valor aumenta a medida que r nos acercamos a la superficie y r disminuye. En la superficie la integral toma el mayor valor posible kq/R. Como el grosor de la superficie es infinitesimal, el trabajo adicional por unidad de carga para lograr que la carga de prueba atraviese la superficie es despreciable. Así, el valor del potencial dentro de la esfera, junto a la superficie, será el mismo valor kq/R. Pero como V es constante dentro de la esfera, el potencial en cualquier lugar también será igual a kq/R. En resumen, dentro de la esfera,



$$V = k\frac{q}{R} = \text{constante} \qquad (2.6.2)$$

El gráfico del potencial V(r) queda entonces como muestra la figura adjunta.

2.8 Capacidad

La expresión para el potencial en la superficie y en el interior de una esfera metálica de radio R viene dada por la ecuación (2.6.2);

$$V = k\frac{q}{R}\,.$$

Esta ecuación puede ser escrita como

$$\frac{q}{V} = \frac{R}{k}$$

El parámetro k es una constante y, para una esfera determinada, R también es una constante. Por tanto, para una esfera cargada, independientemente del valor de la carga que se añada,

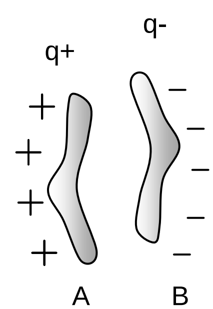
$$\frac{q}{V} = \text{constante} .$$

En la Física son importantes las magnitudes que se mantienen constantes durante un determinado proceso, pues permiten obtener información y predecir resultados independientemente de lo que ocurra durante el proceso. La expresión anterior nos dice que, si q aumenta o disminuye, V lo hace en la misma proporción. Se define entonces la *capacidad* de la esfera por la relación

$$C = \frac{q}{V} .$$

Supongamos ahora que la esfera conductora se deforma a un cuadrado o alguna otra figura geométrica, sin que la carga almacenada se altere. El potencial V no tiene porqué mantenerse invariable (ahora no hay ningún radio R); no obstante, cualquiera que sea ese valor, será el mismo en todos los puntos de la superficie y dentro del cuerpo, ya que la superficie es equipotencial y dentro del conductor el potencial es constante. Se comprueba en la práctica que la relación q/V también se mantiene constante para esta nueva geometría, aunque el valor de la constante desde luego no será el mismo que en el caso de la esfera.

Condensador



Considere un sistema formado por dos conductores cualesquiera, con igual carga pero de signo contrario como se muestra en la figura adjunta. Entonces,

$$\frac{q+}{V_A} = \alpha = \text{constante}, \qquad \frac{q-}{V_B} = \alpha' = \text{constante}$$

La diferencia de potencial entre ambos conductores vendrá dada por

$$Vab = V_B - V_A = \frac{q-}{\alpha'} - \frac{q+}{\alpha} = q\left(\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{\alpha}\right) = q \text{ .(constante)}$$

o, lo que es lo mismo, introduciendo una nueva constante,

$$\frac{q}{V_{ab}} = \text{constante}'$$

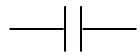
- Un sistema como el de la figura, formado por dos conductores con igual carga y de signo contrario, se denomina *condensador* o capacitor.
- Los conductores reciben el nombre de *armaduras* o placas del condensador.
- La *capacidad* del condensador se define entonces por la relación

$$\boxed{C = \frac{q}{V_{ab}}}$$

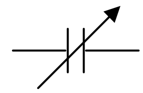
- q y V_{ab} representan, en valor modular, la carga de una de las armaduras y la diferencia de potencial entre ambas. La capacidad así definida siempre toma valor positivo.
- El valor de C depende de la geometría de las armaduras, y sólo se puede calcular en forma explícita en algunos casos de gran simetría.
- En el SI de Unidades, [C] = [q]/[V] = C/V = Farad (F) . También son muy utilizados el microfarad (μF

= 10^{-6} F) y el picofarad (pF = 10^{-12} F).

- En los circuitos eléctricos, los condensadores se simbolizan de la forma siguiente:



fijo

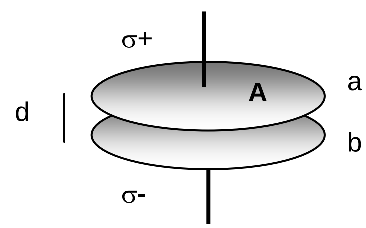


capacidad variable

- Note que entre las placas del condensador cargado aparece una fuerza de atracción, ya que las están cargadas con cargas de signo contrario.

En la figura adjunta se observa una foto de la *botella de Leyden*, uno de los condensadores más simples, descubierto alrededor de 1745, de forma independiente, por el físico holandés Pieter van Musschenbroek de la Universidad de Leyden y el físico alemán Ewald Georg von Kleist. Originalmente era una botella de cristal llena de agua y cerrada, con un alambre o una aguja que traspasaba el tapón y tocaba el agua. Se cargaba poniendo la parte saliente del alambre en contacto con una fuente de voltaje. Cuando se interrumpía el contacto y se tocaba el alambre con la mano, se producía una descarga, manifestada como una sacudida violenta. La botella actual se recubre con una capa de estaño, tanto por la parte interior como por la exterior. El contacto eléctrico se realiza con una barra de latón que atraviesa el tapón de la botella y que está en contacto con la capa interior de metal mediante una cadena. Se produce una descarga completa cuando se conectan las dos capas por medio de un conductor. La botella de Leyden aún se utiliza para demostraciones y experimentos en los laboratorios.

2.9 Capacidad de un Condensador Plano



Un condensador plano es aquel formado por dos planos conductores paralelos e iguales de área A, separados a una distancia d, tal como muestra la figura. Supondremos que ambos planos están cargados con igual densidad superficial de carga y signo contrario σ+ y σ-, respectivamente.

Si la distancia d es mucho menor que las dimensiones lineales de las armaduras, se puede despreciar el efecto de los bordes y tomar la aproximación del plano infinito para calcular E. En ese caso, la intensidad de campo vendrá dada por la expresión analizada en el capítulo 1:

dentro de las placas: $E = \sigma/\varepsilon_o$ (constante)
fuera de las placas: $E = 0$.

La diferencia de potencial entre las placas se calcula a partir de (2.3.3) tomando el valor modular:

$$V_{ab} = |\Delta V| = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\int_a^b dr = \frac{\sigma d}{\varepsilon_o} \qquad (2.8.1)$$

La capacidad del condensador se obtiene sustituyendo en la definición:

$$C = \frac{q}{V_{ab}} = \frac{\sigma A}{\sigma d/\varepsilon_o}$$

$$\boxed{C = \varepsilon_o \frac{A}{d}} \qquad (2.8.2)$$

- Note que el resultado no depende de ningún parámetro eléctrico, sino que depende exclusivamente de la geometría del sistema: es decir, de la distancia **d** entre las placas y del área **A** de una de ellas.
- La expresión anterior se refiere exclusivamente al *condensador plano*. Otras geometrías pueden

tener valores muy diferentes de la capacidad.

- De la expresión (2.8.1) sigue inmediatamente que la diferencia de potencial V_{ab} entre las armaduras puede ser escrita como

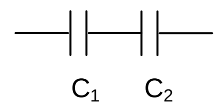
$$V_{ab} = Ed \qquad (2.8.3)$$

Esta expresión será utilizada más adelante.

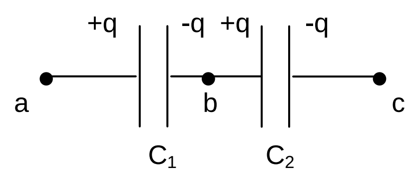
2.10 Condensadores en Serie y Paralelo

Condensadores en Serie

Interesa conocer la *capacidad equivalente* del sistema de condensadores que aparece en la figura. Cuando los condensadores están conectados de esta forma, se dice que están conectados *en serie*. Por capacidad equivalente se entiende la capacidad debe tener un solo condensador para que almacene la misma carga, bajo la misma diferencia potencial, cuando sustituye a los dos de la figura.



Al aplicar una diferencia de potencial en los extremos, aparece un campo eléctrico de intensidad E en el seno de los conductores. Este campo induce una redistribución de las cargas libres en los condensadores como se muestra en la figura, donde $q_1 = q_2 = q$ necesariamente[2].



Además, de acuerdo a la definición de potencial, el trabajo por unidad de carga para llevar una carga desde a hasta c será la suma de los trabajos para llevarla desde a hasta b y desde b hasta c. Es decir, $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$. Para hallar la capacidad equivalente es necesario hallar un condensador que tenga una capacidad tal que

$$C_{eq} = \frac{q}{V_{ac}}$$

donde $q = q_1 = q_2$ y $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$.

Analizando el inverso de la capacidad equivalente, por conveniencia,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V_{ac}}{q} = \frac{V_{ab} + V_{ac}}{q}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Este resultado se generaliza fácilmente cuando hay más de dos condensadores en serie, obteniéndose

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

Cuando los condensadores están en serie, el inverso de la capacidad equivalente es igual a la suma de los inversos de las capacidades.

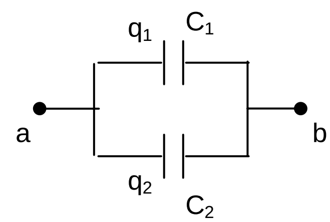
Condensadores en Paralelo

En este caso la conexión tiene la forma representada en la figura. Al establecer una diferencia de poten-

[2] A causa del principio de conservación de la carga. Si en b no había cargas en exceso al inicio, tampoco puede haberlas después que aparezca un potencial en los extremos.

cial V_{ab} en los extremos, ésta se aplica por igual al capacitor C_1 y al C_2[3]. La carga se distribuye entre ambos condensadores: $q = q_1 + q_2$, donde $q_1 \neq q_2$ en general. Considerando que $q = q_1 + q_2$ y dividiendo por V_{ab}:

$$\frac{q}{V_{ab}} = \frac{q_1}{V_{ab}} + \frac{q_2}{V_{ab}}$$



$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

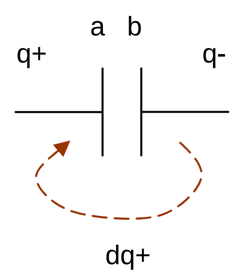
Generalizando a N condensadores en paralelo, se obtiene

$$\boxed{C_{eq} = \sum_i C_i}$$

Cuando los condensadores están en paralelo, a capacidad equivalente es igual a la suma de las capacidades individuales.

2.11 Energía del Campo Eléctrico

Energía de un Condensador Cargado



Durante el proceso de carga de un condensador, al ser conectado a una fuente de voltaje, una cierta cantidad de carga $\delta q+$ se añade a una de las placas en cada intervalo de tiempo, mientras que otra carga $\delta q-$ se va añadiendo simultáneamente a la otra placa. El efecto resultante es similar al que se obtiene cuando una carga $\delta q+$ se extrae de la placa negativa (dejando en ella una carga adicional $\delta q-$, debido al principio de conservación de la carga) y esa carga $\delta q+$ se adiciona a la placa positiva (ver figura).

Se desea calcular la variación de energía durante el proceso de carga del condensador. La ec. (2.2.1) nos dice que la variación de energía potencial en el condensador puede ser escrita como

$$\Delta E_p = V_{ab}q \ .$$

Pero en este caso la diferencia de potencial V_{ab} entre las placas no es constante. Varía a medida que varía la carga en el condensador. Si tomamos una carga infinitesimalmente pequeña dq, entonces sí es posible considerar que V_{ab} se mantiene prácticamente constante cuando el dq pasa de la placa negativa a la positiva. El correspondiente incremento de la energía también será infinitesimal, y la expresión correcta a utilizar es:

$$dE_p = V_{ab}dq \ .$$

Si quisiéramos calcular la variación de energía para un valor finito de carga, habría que sumar para todos los valores infinitesimales a medida que V_{ab} va aumentando. Cuando $dq \to 0$, el proceso de límites conduce a la definición de integral. Por tanto, integrando a ambos lados de la expresión anterior, se obtiene

$$E_p(2) - E_p(1) = \int_{q_1}^{q_2} V_{ab}dq$$

Para resolver la integral es necesario expresar todos los parámetros en función de la misma variable. Considerando la definición de capacidad, sustituyendo $V_{ab} = q/C$ y tomando $q_1 = 0$ (lo que hace $E_p(1) = 0$, correspondiente al condensador descargado), se obtiene

[3] La diferencia de potencial tiene el mismo valor cuando se calcula por cualquier trayectoria.

$$E_p = \frac{1}{C}\int_0^{q_2} q\,dq$$

Sustituyendo E_p por E_c para especificar que nos referimos a la energía del condensador cargado, integrando la expresión anterior y evaluando, se llega a

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$$

Una expresión análoga se obtiene al hacer uso de la expresión $q = CV_{ab}$. Sustituyendo se obtiene:

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2}CV_{ab}^2} \qquad (2.10.1)$$

Las expresiones anteriores reflejan el valor de la energía almacenada en el condensador cargado. Es una energía que se puede recuperar y transformarse posteriormente en otros tipos de energía (sistema conservativo).

Densidad de Energía del Campo Eléctrico

Apliquemos el resultado obtenido en (2.10.1) al cálculo de la energía almacenada por unidad de volumen en un condensador plano, donde la capacidad viene dada por $C = \varepsilon_o A/d$ (ec. 2.8.2). Designando la energía por unidad de volumen como ε, considerando que el volumen entre las placas del condensador puede expresarse como $V = Ad$, y que la diferencia de potencial entre las placas toma el valor $V_{ab} = Ed$ (ec. 2.8.3) tendremos:

$$\varepsilon = \frac{E_c}{V} = \frac{1}{2V}CV_{ab}^2 = \frac{1}{2Ad}\varepsilon_o\frac{A}{d}E^2d^2$$

Simplificando la expresión anterior, se llega a

$$\boxed{\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon_o E^2}$$

Esta expresión no depende de las características del condensador, sino solamente del valor de la intensidad de campo E, y representa la energía por unidad de volumen asociada a la existencia del campo electrostático.

El resultado, obtenido para el caso particular de un condensador plano, es completamente general. En cualquier situación es posible comprobar que la energía está asociada directamente al campo eléctrico, y no a un dispositivo particular. También representa el hecho de que hay que gastar energía para establecer un campo electrostático, y que para lograr que desaparezca hay que extraer energía del sistema. La misma cantidad de energía que fue necesario gastar para establecer un campo electrostático en una región del espacio, será recuperada cuando se haga desparecer el campo de dicha región.

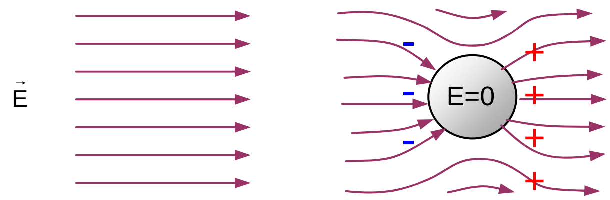
El Rayo y las Cargas Eléctricas. No se conoce por completo el modo en el que se cargan las nubes de electricidad, pero la mayoría tienen carga negativa en la base y positiva en la cima. Muchos meteorólogos creen que el hielo es un factor necesario para que ocurra la polarización, porque los rayos no suelen observarse hasta que ocurre la formación de hielo en las capas superiores de las nubes. Ciertos experimentos muestran que las gotas de agua grandes, con caída rápida, se negativizan, mientras que las gotas pequeñas,

que caen con mayor lentitud se vuelven electropositivas. Por tanto, la polarización de una nube es probable que se produzca por las distintas velocidades de caída de las gotas grandes y pequeñas.

Como quiera que se forme, la carga negativa en la base de la nube induce otra positiva en la tierra situada debajo que actúa como la segunda placa de un condensador gigante. Cuando el potencial eléctrico entre dos nubes o entre una nube y la tierra alcanza una magnitud suficiente (unos 10 000 V por cm), el aire se ioniza a lo largo de una trayectoria estrecha, y se produce el destello de un relámpago.

2.12 Conductores en Campos Eléctricos

En la figura se observa la representación de un campo electrostático homogéneo en una región del espacio, antes y después de introducir en el mismo un cuerpo construido de una sustancia conductora; por ej., metal.



Como se analizó anteriormente, la gran movilidad de las cargas hace que éstas se redistribuyan de forma tal que E = 0 en el interior del conductor. Además, la componente de E sobre la superficie ($E_{||}$) también debe ser nula en todos los puntos, pues de lo contrario no se habría alcanzado el equilibrio y las cargas libres estarían continuamente en movimiento sobre la superficie. Otra forma de llegar a la misma conclusión es recordar que la superficie del conductor es una superficie equipotencial y V = constante sobre la superficie. En ese caso E = - dV/dx = 0 a lo largo de cualquier dirección x sobre la superficie, y solo existirá la componente normal de la intensidad de campo.

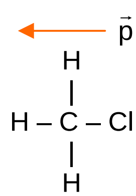
Por tanto, ocurre una redistribución de las cargas y las líneas de fuerza se distorsionan hasta hacerse perpendiculares a la superficie. El campo se anula en el interior del conductor.

2.13 Dieléctricos en Campos Eléctricos

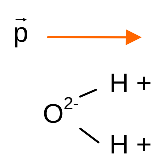
En los dieléctricos no hay movilidad de las nubes electrónicas, que se encuentran fuertemente ligadas a los átomos. Sólo existe la posibilidad de reagrupamiento a distancias del orden atómico-molecular. En dependencia de si sus moléculas presentan o no un momento dipolar diferente de cero, los dieléctricos se dividen en polares y no polares.

Dieléctricos polares

Un dieléctrico polar es cualquier sustancia no conductora, sólida, líquida o gaseosa, cuyas moléculas posean un momento dipolo permanente. Esta propiedad es característica de muchas moléculas no simétricas, donde la distribución de las cargas está acorde a la asimetría de la molécula, como por ejemplo, en el cloruro de hidrógeno (HCl), yoduro de potasio (KI), el agua (H_2O) y el cloruro de metilo (CH_3Cl).



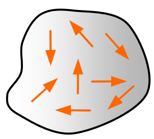
cloruro de metilo



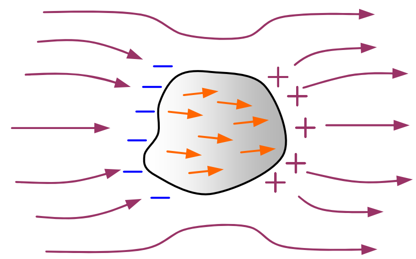
agua

Como se analizó en el cap. 1, al aplicar un campo externo de intensidad E, los dipolos tienden a orientarse en el sentido y dirección de E bajo la acción de un torque $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$. En la figura siguiente aparecen las características principales de un dieléctrico polar en ausencia de campo externo y en presencia del mismo, respectivamente.

Las líneas de fuerza del campo externo se desvían de manera similar a como ocurre cuando se introduce un conductor, pero como las cargas ahora no son móviles, sino que están ligadas a los átomos, las líneas de fuerza no se hacen necesariamente perpendiculares a la superficie del dieléctrico. La intensidad de campo tampoco se anula dentro del dieléctrico, y $E \neq 0$.



$E_{externo} = 0$



$E_{externo} \neq 0$

El vector *polarización* se define por la expresión

$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum \vec{p}_i$$

donde la suma es para todos los momentos dipolos microscópicos del cuerpo. El vector polarización es una medida macroscópica del grado de orden de los dipolos microscópicos.

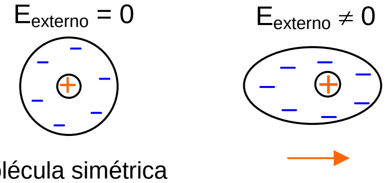
En la figura anterior, cuando no hay campo externo aplicado, los dipolos están orientados al azar, aleatoriamente, en todas las posibles direcciones del espacio. Al sumar todos esos vectores microscópicos de igual magnitud se anulan entre sí, y el resultado final es que $\vec{P} = 0$. Por el contrario, cuando se aplica un campo externo aparece una orientación parcial o total de todos los dipolos en la dirección del campo. En este caso la suma de los momentos dipolos microscópicos no se anula y $\vec{P} \neq 0$.

Se dice entonces que la sustancia en cuestión está *polarizada*, y que la polarización es *dipolar*. Como en las superficies aparecen cargas en exceso negativas y positivas, si el campo disminuye con la distancia aparecerá una fuerza neta de atracción hacia el origen de las líneas de fuerza.

Dieléctricos no Polares

Los dieléctricos no polares están formados por moléculas que no poseen un momento dipolo permanente. Esta particularidad es característica de sustancias cuyas moléculas son simétricas. Ejemplos de dieléctricos no polares son el nitrógeno gaseoso (N_2), hidrógeno (H_2), cloro (Cl_2), metano (CH_4) y la mayoría de los hidrocarburos. Sin embargo, al aplicar un campo externo a un dieléctrico no polar, aparecen *dipolos inducidos* a causa de la deformación de las nubes electrónicas (ver figura).

$E_{externo} = 0$ $E_{externo} \neq 0$



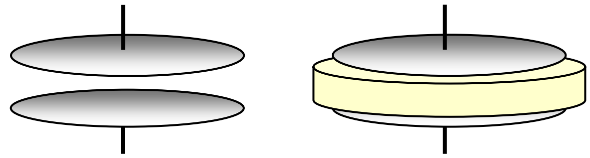
molécula simétrica

$\vec{p} = 0$; $\vec{P} = 0$ $\vec{p} \neq 0$; $\vec{P} \neq 0$

Por tanto, el comportamiento de la sustancia en presencia de campo externo será prácticamente el mismo que en el caso de los dieléctricos polares, pero en general con una intensidad mucho menor.

2.14 Condensador con Dieléctrico

¿Qué sucede cuando un dieléctrico se introduce entre las láminas de un condensador? Para contestar esta pregunta analicemos la figura, que representa dos condensadores idénticos, uno vacío y el otro con el espacio entre las placas relleno con algún dieléctrico. Se encuentra en la práctica que la capacidad del condensador aumenta al introducir el dieléctrico ($C > C_o$). Se define entonces la *permitividad dieléctrica relativa* del dieléctrico en cuestión por la relación

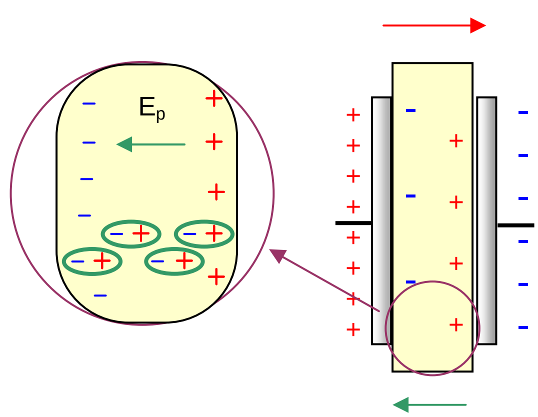


$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{C}{C_o}} \qquad (2.13.1)$$

La permitividad dieléctrica es siempre mayor o igual que la unidad ($\varepsilon_r = 1$ para el vacío). En la tabla siguiente se muestran valores típicos de la permitividad de gases, líquidos y sólidos[4].

Sustancia	ε_r
aire	1.00054
agua	78
vidrio pyrex	4.5
polietileno	2.3
titanato de bario $BaTiO_3$	1000 (25°C) 6000 (120°)

El esquema adjunto muestra un dieléctrico colocado entre las placas de un condensador plano con densidad superficial de carga σ, así como la distribución del campo eléctrico en su seno. El grosor se encuentra muy exagerado para facilitar la representación. Al orientarse los dipolos microscópicos bajo la acción del campo externo, las cargas de los dipolos se anulan en el seno del dieléctrico, tal como aparece en el esquema.



Sin embargo, las cargas que quedan en la superficie forman una *densidad superficial de carga de polarización* $\sigma_p < \sigma$. Esta densidad representa las cargas no compensadas, "ligadas" a la superficie del dieléctrico.

En el ejemplo que estamos considerando el dieléctrico también se comporta como un condensador plano, con distribución de carga contraria a la del condensador externo[5].

La distribución de cargas σ_p en la superficie del dieléctrico da origen a un campo interno de polarización E_p, de sentido contrario al campo externo E_o. Este campo atenúa el valor de la intensidad de campo en el seno del dieléctrico, y su valor se puede obtener aplicando la expresión conocida para el campo del condensador plano:

[4] Un dieléctrico compuesto de un disco de parafina endurecido mantendrá su polarización durante años al someterlo a la acción de una tensión eléctrica. Estos dieléctricos se denominan *electretos.*
[5] Si el condensador no fuera plano, pero el volumen contenido entre las placas estuviera completamente ocupado por el dieléctrico, el resultado final del análisis de este epígrafe sería el mismo.

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_o}. \qquad (2.13.2)$$

Por consiguiente, en el seno del dieléctrico la intensidad de campo resultante tiene el valor

$$E = E_o - E_p . \qquad (2.13.3)$$

Si el campo aplicado E_{o}. no es muy intenso, en la práctica se encuentra que el vector polarización cumple la relación siguiente:

$$\vec{P} = \varepsilon_o \chi_D \vec{E} \qquad (2.13.4)$$

El parámetro χ_D se denomina *susceptibilidad dieléctrica*. En el SI de unidades la susceptibilidad dieléctrica y la permitividad dieléctrica están relacionados por la expresión

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \chi_D}$$

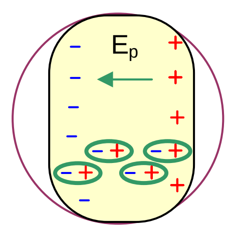
Otro parámetro muy utilizado para caracterizar las sustancias dieléctricas es la permitividad absoluta, que se define por la expresión

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r}$$

Demostración $\varepsilon_r = 1 + \chi_D$. Sea L el grosor del dieléctrico en la figura y ℓ la longitud de una molécula. Supondremos que todos los dipolos microscópicos están perfectamente alineados en la dirección del campo aplicado. Por definición,

$$P = \frac{\sum p_i}{V} = \frac{\sum q_i \ell_i}{V}$$

Al sumar para todos los dipolos, como las cargas internas se anulan, se obtiene un resultado equivalente al de un solo dipolo de longitud L y de carga igual a la carga superficial ligada q_p. Es posible escribir entonces V = AL, y



$$P = \frac{q_p L}{AL} = \frac{q_p}{A} = \sigma_p$$

$$\boxed{P = \sigma_p}$$

El resultado anterior refleja el hecho de que el módulo del vector polarización es igual a la densidad de cargas "ligadas" en la superficie del dieléctrico. Entonces, considerando condensadores idénticos con igual carga, con y sin dieléctrico, haciendo uso de (2.8.3):

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_o} = \frac{q/V'}{q/V} = \frac{V}{V'} = \frac{E_o d}{Ed} = \frac{E_o}{E}$$

En esta expresión E es el campo en el seno del dieléctrico, y E_o el campo externo en ausencia de dieléctrico. En la sección anterior la ec. (2.13.3) expresa que $E = E_o - E_p$. Por tanto,

$$\varepsilon_r = \frac{E + E_p}{E} = 1 + \frac{E_p}{E}$$

Sustituyendo las expresiones (2.13.2) y (2.13.4) con $\sigma_p = P$; $E_p = \sigma_p/\varepsilon_o = P/\varepsilon_o$, $E = P/\varepsilon_o\chi_D$, se llega a

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_D .$$

Rigidez dieléctrica

Si la diferencia de potencial entre las placas de un condensador con dieléctrico aumenta mas allá de cierto valor, los átomos que forman el dieléctrico pueden llegar a ionizarse a causa de la fuerza de interacción entre el campo y las cargas ligadas. El dieléctrico se transforma entonces en conductor en una región muy localizada, y salta una chispa muy intensa que es capaz incluso de perforar el dieléctrico y dañar el condensador o el circuito que le proporciona energía.

La capacidad de un dieléctrico de oponerse a la perforación se mide por la *rigidez dieléctrica*. Se define como la intensidad de campo máxima E_{rig} que puede ser alcanzada dentro del dieléctrico antes de que ocurra la perforación. Como $E = - dV/dx$, se acostumbra expresar E_{rig} en unidades de potencial por longitud (megavolt/cm). En la tabla siguiente aparecen algunos valores típicos.

Material	**E_{rig} (MV/cm)**
mica	100 - 300
goma	30 -50
aceite de transformador	15 - 25
aire en condiciones normales	2 - 5