

Capítulo 8. Oscilaciones y Ondas Mecánicas

8.1 Conceptos Básicos

Movimiento periódico

Es cualquier movimiento que se repite a intervalos regulares de tiempo. Por ejemplo, las vibraciones de las cuerdas de una guitarra, las contracciones del corazón, el movimiento de un péndulo, las mareas.

Movimiento armónico

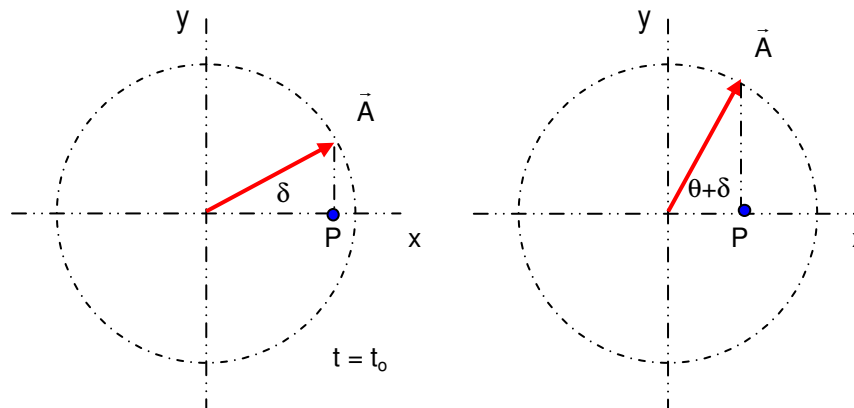
Corresponde al caso particular en que el movimiento periódico se puede representar como un desarrollo en serie de senos y cosenos (serie de Fourier). Para el movimiento en una dimensión:

$$x = f(t) = A_1 \text{sen} \omega t + B_1 \text{cos} \omega t + A_2 \text{sen} 2\omega t + B_2 \text{cos} 2\omega t + A_3 \text{sen} 3\omega t + \dots$$

Los términos ω , 2ω , 3ω ... se denominan: 1er armónico, 2do armónico, 3er armónico, etc. De todos los posibles movimientos armónicos que existen, el más sencillo es el que puede ser descrito por una sola función seno o coseno, el *movimiento armónico simple*, que en lo adelante se designará por las siglas MAS.

8.2 Movimiento Armónico Simple

Existen muchas formas de obtener un MAS. Una de ellas es la siguiente: considere que en la figura el extremo del vector \vec{A} rota de derecha a izquierda con velocidad angular constante ω . El punto P es la proyección del extremo del vector sobre el eje de las x.



En el instante inicial $t = t_0$, la posición de P vendrá dada por $x_0 = A \cos \delta$. En un instante posterior, cuando el vector ha rotado un ángulo θ , la posición del punto P es: $x = A \cos(\theta + \delta)$. Pero si el vector está rotando con velocidad angular $\omega = \text{constante}$, entonces $\theta = \omega t$, y finalmente se obtiene:

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

Así, el punto P realiza efectivamente un MAS sobre el eje x. Si en vez de analizar la proyección sobre el eje x se analiza la proyección sobre el eje y, se obtiene una expresión similar, ahora en función del seno del ángulo:

$$y = A \text{sen}(\omega t + \delta)$$

Como $\text{sen}(\theta + \pi/2) = \text{cos} \theta$, el resultado anterior significa que, indistintamente, siempre es posible utilizar tanto seno como coseno para representar un MAS en una dimensión, ya que $\pi/2$ se puede sumar o res-

tar del ángulo δ sin que la dependencia funcional se altere. Cada parámetro incluido en la expresión $x = A\text{sen}(\omega t + \delta)$ se designa de una forma específica:

- x: elongación
- A: amplitud
- ω : frecuencia angular
- δ : fase inicial
- $(\omega t + \delta)$: fase

La frecuencia angular cumple la relación $\omega = 2\pi f$, donde f es la *frecuencia* de la oscilación (número de veces que el movimiento se repite en la unidad de tiempo). También se acostumbra expresar la ecuación anterior en función de la frecuencia como

$$x = A\text{sen}(2\pi ft + \delta)$$

Asimismo, es posible expresar la frecuencia angular en función del período T como $\omega = 2\pi/T$ (tiempo que tarda el punto P en dar una oscilación completa). En los movimientos oscilatorios se acostumbra expresar la frecuencia en *Hertz* (Hz), en honor del físico alemán Heinrich Hertz.

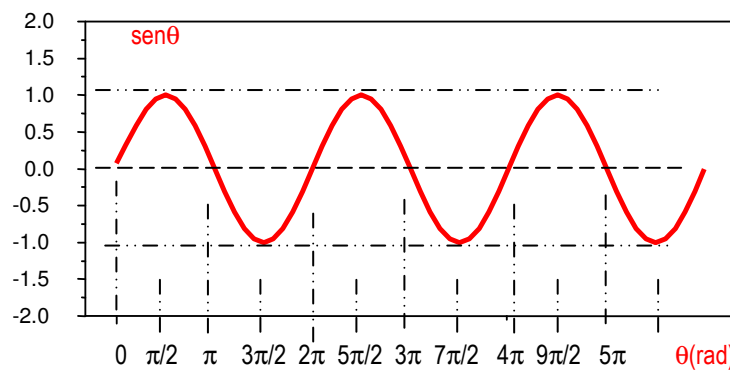
Heinrich Hertz, (1857-1894). Fue profesor de física en la Universidad de Bonn, Alemania. Hertz profundizó y extendió la teoría electromagnética de la luz, formulada por el físico británico James Clerk Maxwell en 1884. Demostró que la electricidad puede transmitirse en forma de ondas electromagnéticas, las cuales se propagan a la velocidad de la luz y tienen, además, muchas de las propiedades de las ondas mecánicas. Sus experimentos con estas ondas le condujeron al descubrimiento del telégrafo inalámbrico y la radio. Durante mucho tiempo se utilizó el sinónimo de "ondas hertzianas" para designar a las ondas electromagnéticas.



Análisis de la función seno θ

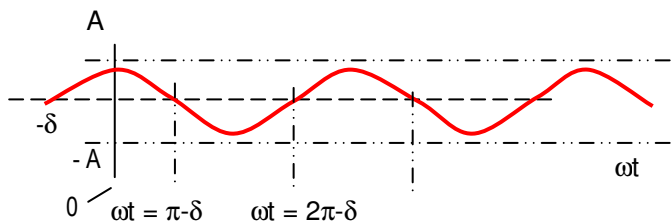
Cuando se grafica la función $y = \text{sen}\theta$ se obtiene algo similar a lo que aparece en la figura. En esta figura se cumple que:

- $\text{sen}\theta = 0$ cuando $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots n\pi$
- $\text{sen}\theta = \pm 1$ cuando $\theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots (2n-1)\pi/2$



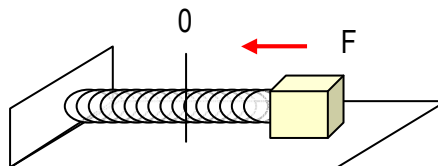
Por tanto, la función $x = A\text{sen}(\omega t + \delta)$ debe tener forma similar a la de la figura cuando se grafica en función de $\theta = \omega t$, tomando en cuenta que cuando $x = 0$, $\rightarrow \omega t + \delta = 0 \rightarrow \omega t = -\delta$. El gráfico que se obtiene es muy parecido, pero desplazado o corrido hacia la izquierda un ángulo δ (*desfasado* en δ respecto al

gráfico anterior).



8.3 Sistema Cuerpo-Resorte

La figura representa un cuerpo de dimensiones despreciables, y masa m , atado a un resorte de masa también despreciable. Se supone que no hay fricción entre las superficies en contacto, de forma que la única fuerza actuando en el eje x es la fuerza elástica $F_e = -kx$.



Las fuerzas actuando en el eje y se anulan: $N - F_g = 0$.

En el eje x la 2da ley de Newton proporciona una ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes, que tiene por solución la ley del movimiento de la partícula, $x = f(t)$.

$$F_{Rx} = ma_x$$

$$-kx = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Es posible demostrar que la solución de ésta ecuación diferencial tiene la forma de un MAS:

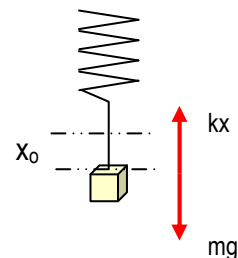
$$x = A \text{sen}(\omega t + \delta)$$

pero sólo cuando la frecuencia angular ω cumple la relación

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como toda ecuación diferencial de 2do orden, en la solución aparecen dos constantes arbitrarias que deben ser evaluadas posteriormente, a partir de datos iniciales conocidos. En este caso, las constantes arbitrarias son la amplitud A y el ángulo de fase δ . La frecuencia angular $\omega = (k/m)^{1/2}$ recibe el nombre de *frecuencia de oscilación propia* del sistema.

Algo similar sucede cuando se cuelga un cuerpo de un resorte en la vertical y se le aplica un impulso inicial. La diferencia con el caso anterior radica en que, a causa de la acción de la gravedad, la posición de equilibrio alrededor de la cual oscila el resorte no se corresponde con la posición de equilibrio del resorte. La nueva posición de equilibrio se encuentra desplazada hacia abajo una distancia x_0 que debe cumplir la relación $kx_0 = mg$.



Velocidad y aceleración en el MAS

Para un MAS;

$$x = A \text{sen}(\omega t + \delta) \quad (1)$$

$$v = dx/dt = A \cos(\omega t + \delta) \cdot \omega = \omega A \cos(\omega t + \delta)$$

Para cualquier ángulo θ se cumple la siguiente igualdad trigonométrica: $\cos\theta = \text{sen}(\theta + \pi/2)$. Por tanto,

$$v = \omega A \text{sen}(\omega t + \delta + \pi/2) \quad (2)$$

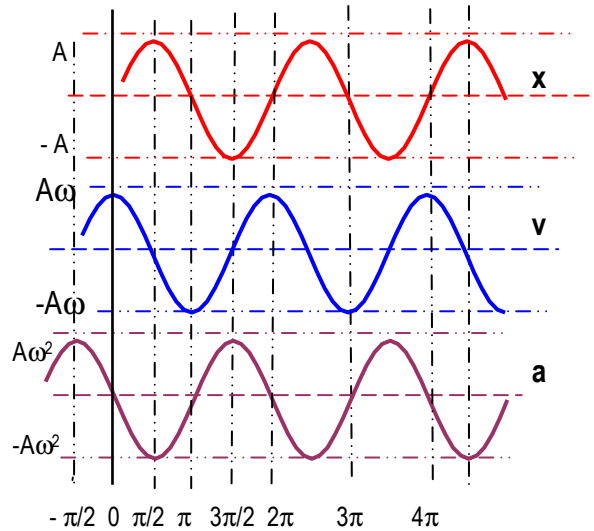
$$a = dv/dt = \omega A \cos(\omega t + \delta + \pi/2) \cdot \omega = \omega^2 A \text{sen}(\omega t + \delta + \pi)$$

$$a = \omega^2 A \text{sen}(\omega t + \delta + \pi) \quad (3)$$

Note que la aceleración *no* es constante. Por tanto, las expresiones deducidas anteriormente para el MRUV en una dimensión no son válidas para este tipo de movimiento. Es conocido de trigonometría que $\text{sen}(\omega t + \delta + \pi) = -\text{sen}(\omega t + \delta)$. Sustituyendo en la ecuación (3);

$$a = -\omega^2 A \text{sen}(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

$$a = -\omega^2 x$$

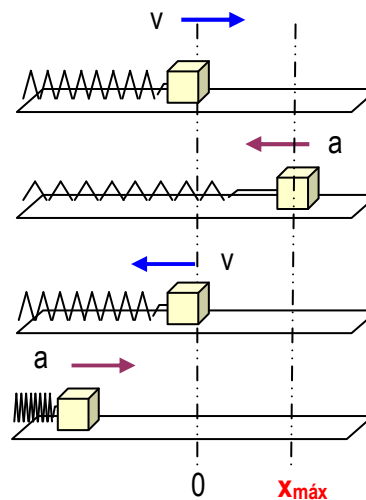


Analizando las expresiones (1) a (3) se ve que la elongación, la velocidad y la aceleración están desfasadas en $\pi/2$ una respecto a la otra. Para analizar el significado del desfase, representemos gráficamente como se comporta la partícula que oscila en diferentes instantes.

En el gráfico, para simplificar, se ha considerado $\delta = 0$.

En el instante inicial, $t = 0$ ($\omega t = 0$) la elongación es cero; sin embargo, la velocidad es máxima positiva y la aceleración es cero (ver gráfico). A continuación se resumen los valores de x , v y a en algunos instantes notables. Note que la situación inicial se repite para $\omega t = 2\pi$, y así sucesivamente.

$\omega t = 0$	$x = 0$; $v = v_{\text{máx}(+)}$; $a = 0$
$\omega t = \pi/2$	$x = x_{\text{máx}} = A$; $v = 0$; $a = a_{\text{máx}(-)}$
$\omega t = \pi$	$x = 0$; $v = v_{\text{máx}(-)}$; $a = 0$
$\omega t = 3\pi/2$	$x = x_{\text{máx}} = -A$; $v = 0$; $a = a_{\text{máx}(+)}$



La 2da ley de Newton $\vec{F}_R = m\vec{a}$ nos dice que, cuando la aceleración es máxima, la fuerza actuando sobre el cuerpo también lo será. De aquí que la fuerza máxima corresponda a la máxima elongación $\pm A$ y

al mayor valor posible de la ley de Hooke, $F = -kA$.

8.4 Energía en el MAS

Cómo la única fuerza que realiza trabajo en el sistema cuerpo-resorte es la fuerza elástica, el sistema será conservativo y la energía mecánica se mantendrá constante. Por tanto

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{constante})$$

Sustituyendo x y v por sus correspondientes expresiones obtenidas a partir de la ecuación (1) de la sección anterior y tomando en cuenta que $\omega^2 = k/m$:

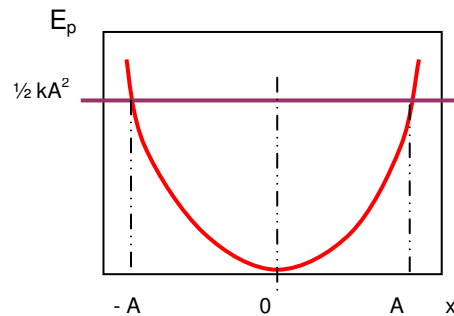
$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \delta)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\{\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta)\}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Gráfico de la energía

Si se representa en un gráfico la energía potencial elástica $\frac{1}{2}kx^2$ de una partícula que realiza un MAS, se obtiene una parábola como la de la figura. En el gráfico también se ha superpuesto el valor constante de la energía mecánica $\frac{1}{2}kA^2$.



Los puntos donde $x = \pm A$ son los *puntos de retorno*, donde la energía cinética se hace cero ($v = 0$).

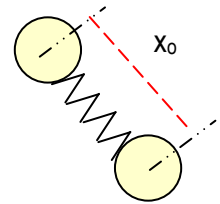
Análiticamente lo anterior se expresa de la siguiente forma:

$$E_c = E - E_p = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

Si $x = \pm A \rightarrow E_c = 0$. También se puede ver de ésta expresión que si $x = 0$, entonces la energía cinética alcanza su máximo valor, $E_c = \frac{1}{2}kA^2$.

A los efectos de las vibraciones, una molécula diatómica como las del O_2 ó N_2 gaseoso se puede considerar, en primera aproximación, formada por dos pequeñas esferas de igual masa unidas por un resorte, oscilando alrededor de una posición de equilibrio x_0 . Su energía será, por tanto, $\frac{1}{2}kA^2$. Esta energía microscópica se manifiesta en lo macroscópico como *temperatura*, por la que la temperatura del gas aumenta con la amplitud de la vibración de sus moléculas.



Ejemplo. Un cuerpo de masa m realiza un MAS de acuerdo a la ecuación $x = 10.2\text{sen}(5t + 0.2)$, donde x está en centímetros y t en segundos. Calcular: a) amplitud, b) frecuencia angular, c) período, d) fase inicial, e) fase para $t = 2\text{s}$, f) velocidad en $t = 0.59\text{ s}$.

Resolución:

a) $A = 10.2\text{ cm}$

b) $\omega = 5\text{ rad/s}$

c) $T = 2\pi/\omega = 2\pi/5 = 0.4\pi\text{ s}$

d) $\delta = 0.2\text{ rad}$

e) $(5t + 0.2)|_{t=2} = 10.2\text{ rad}$

f) $v = A\omega\cos(\omega t + \delta) = 10.2 \times 5 \times \cos(5 \times 0.59 + 0.2) = 51\cos(3.15) \approx 51\cos(180^\circ) = -51\text{ m/s}$.

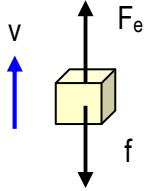
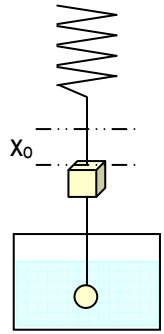
8.5 Movimiento Armónico Amortiguado

Considere el dispositivo de la figura, donde la esfera que está sumergida en el líquido tiene masa despreciable.

El resorte tiene una constante k , y el cubo es de masa m . Al estar sumergida en un fluido, la esfera se encuentra sometida a fuerzas de fricción por viscosidad que son proporcionales a la velocidad del cuerpo:

$$\vec{f} = -b\vec{v}$$

b es un coeficiente que depende de las características del líquido y de la forma del cuerpo sumergido, y tiene dimensiones de N/m/s.



Cuando al bloque se le suministra un impulso inicial, el sistema comienza a oscilar, pero la fricción hace que vaya perdiendo energía y que la amplitud de las oscilaciones disminuya, hasta detenerse totalmente. Como la fuerza de fricción siempre se opone al sentido del movimiento, el diagrama de fuerzas en un instante determinado es el de la figura.

Como se dijo anteriormente, el efecto de la atracción gravitatoria es hacer que el cuerpo oscile alrededor de una posición de equilibrio x_0 que cumple la relación $kx_0 = mg$. Por tanto, en lo que sigue sólo tendremos en cuenta el análisis de la fuerza elástica y la de fricción, y no se tomará en cuenta el peso del cuerpo. Note que los sentidos de F_e y de f varían en dependencia de si el cuerpo está subiendo o si está bajando. Sin embargo, es posible plantear el problema en forma vectorial de manera general:

$$\vec{F}_e + \vec{f} = m\vec{a}$$

y como el movimiento es en una dimensión:

$$-kx - bv = ma$$

Sustituyendo la aceleración y la velocidad por las correspondientes derivadas y agrupando términos, se obtiene una ecuación diferencial de 2do orden a coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

El término b/m tiene dimensiones de t^{-1} . Efectivamente:

$$\frac{[b]}{[m]} = \frac{\frac{N}{m/s}}{kg} = \frac{\frac{kgm/s^2}{m/s}}{kg} = \frac{1}{s}$$

Por tanto, resulta conveniente designar $\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau}$ donde τ se denomina *tiempo de relajación* por razones

que quedarán esclarecidas más adelante. Expresando $d^2x/dt^2 = x''$, $dx/dt = x'$, $k/m = \omega_0^2$ (frecuencia del oscilador libre) se obtiene finalmente

$$x'' + \frac{1}{\tau} x' + \omega_0^2 x = 0$$

La solución de ésta ecuación diferencial es del tipo $x = f(t)$, con dos constantes arbitrarias que deben ser evaluadas a partir de las condiciones iniciales. La ecuación tiene diferentes soluciones en dependencia de si ω_0 es mayor, igual o menor que $1/2\tau$.

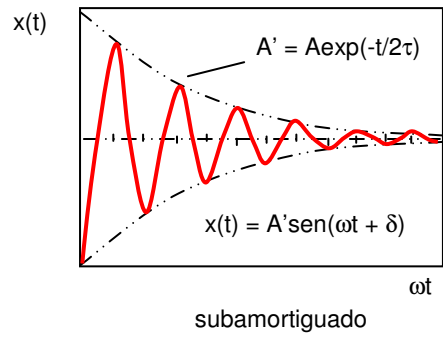
Caso 1. Movimiento sub-amortiguado: $\omega_0 > \frac{1}{2\tau}$

La solución toma la forma:

$$x(t) = A e^{-t/2\tau} \text{sen}(\omega t + \delta)$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$ (solución real cuando $\omega_0 > 1/2\tau$).

Note que la solución se puede interpretar como un MAS con amplitud variable $A' = A e^{-t/2\tau}$.



Caso 2. Movimiento críticamente amortiguado: $\omega_0 = \frac{1}{2\tau}$

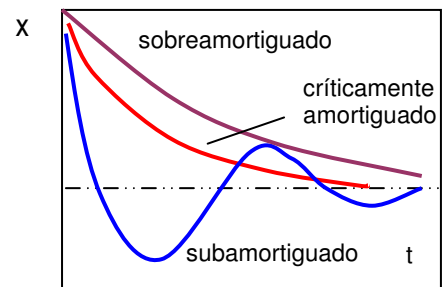
En este caso $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = 0$. El sistema no oscila y la solución tiene la forma:

$$x(t) = A e^{-t/2\tau} \text{sen}(\delta)$$

Si el cuerpo se separa de la posición de equilibrio, regresa a ella sin oscilar (ver figura).

Caso 3. Movimiento sobreamortiguado: $\omega_0 < \frac{1}{2\tau}$

En este caso ω es un número complejo (se obtiene un número imaginario para la frecuencia ω). Las expresiones que se obtienen son complejas y no serán analizadas. Sólo es necesario señalar que el resultado es muy parecido al del caso anterior. La diferencia esencial radica en que se tarda un tiempo mayor en alcanzar el estado de equilibrio (ver gráfico).



Como ejemplo de aplicación de los sistemas de amortiguamiento mecánico pueden citarse los amortiguadores de puertas, autos y otros vehículos. Estos amortiguadores incluyen un resorte acoplado a un sistema hidráulico (de aceite) que regula la compresión o torsión del resorte, para que éste recupere lentamente su longitud inicial. En los amortiguadores que se colocan en las puertas usualmente se busca que trabajen en régimen crítico, para así lograr que la puerta se cierre en el menor tiempo posible, pero sin golpear el marco.

8.6 Energía en el Movimiento Subamortiguado

En los casos anteriores, como existe la fricción, hay disipación de energía. En el caso del movimiento subamortiguado, la energía del oscilador se obtiene sustituyendo el valor decreciente de la amplitud A' en la expresión de la energía mecánica $\frac{1}{2} k A^2$:

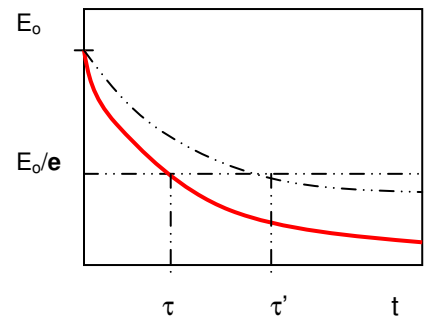
$$E = \frac{1}{2} k A'^2$$

$$E = \frac{1}{2} k \{A e^{-t/2\tau}\}^2$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 e^{-t/\tau}$$

Llamando E_0 a la energía inicial $\frac{1}{2} k A^2$;

$$E = E_0 e^{-t/\tau}$$



Note que cuando $t = \tau$, entonces $E = E_0/e$, donde $e \approx 2.72$ es la base de los logaritmos neperianos.

Por tanto, el tiempo de relajación τ es el tiempo que tarda la energía del oscilador en disminuir e veces (ver gráfico). Mientras mayor es el tiempo de relajación, más tiempo tarda en disminuir la energía del oscilador. En la figura, $\tau' > \tau$ indica que la energía disminuye más lentamente.

8.7 Movimiento Armónico Forzado

Considere la ecuación diferencial del movimiento armónico amortiguado de la sección anterior, a la que se le adiciona una fuerza *externa* del tipo

$$F = F_0 \text{sen}(\omega_e t) .$$

El término ω_e representa una frecuencia externa que, en general, difiere de la frecuencia propia del sistema $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$. La ecuación diferencial de la sección 6 toma entonces la forma:

$$x'' + \frac{1}{\tau} x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \text{sen}(\omega_e t)$$

Es posible demostrar que esta ecuación tiene una solución del tipo

$$x(t) = x_0 \text{sen}(\omega_e t + \varphi) \quad (1)$$

donde

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\left[(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_e/\tau)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega_e/\tau}{\omega_e^2 - \omega_0^2}$$

Análisis de la solución:

- De la solución (1) se ve inmediatamente que *el sistema vibra con la frecuencia impuesta ω_e y no con la frecuencia propia o natural ω_0 .*
- El movimiento *no* es amortiguado (la amplitud x_0 es constante en el tiempo).
- x_0 depende de la frecuencia de la fuerza externa, y tiene un máximo cuando $\omega_e^2 = \omega_0^2 - 1/2\tau^2$. El fenómeno se conoce como *resonancia*.

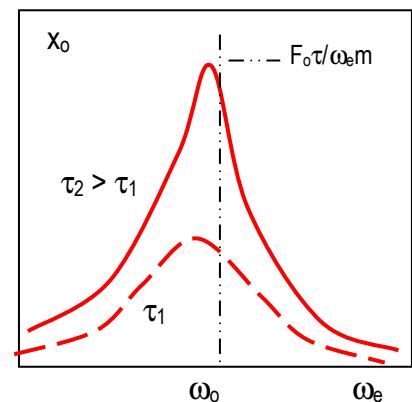
Usualmente sólo interesan los casos donde la disipación de energía es pequeña (gran τ) y el término $1/2\tau^2$ es muy pequeño y puede despreciarse en comparación con ω_0 . La condición de resonancia queda entonces como

$$\omega_e \approx \omega_0 .$$

Significa que la máxima amplitud de las oscilaciones tiene lugar cuando la frecuencia externa coincide aproximadamente con la frecuencia de las oscilaciones propias del circuito, $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$. Considerando $1/2\tau \approx 0$ y $\omega_e = \omega_0$ en las expresiones anteriores se obtiene que, en la resonancia:

$$x_0(\text{res}) = \frac{F_0 \tau}{\omega_e m} .$$

Según ésta expresión, aunque la fuerza aplicada F_0 sea pequeña, si las pérdidas de energía son también pequeñas ($\tau \rightarrow \infty$), entonces la amplitud $x_0(\text{res})$ también puede tender al infinito.



Quiere decir que la amplitud se hace tan grande que el sistema puede incluso dejar de existir; se rompe o se desarticula.

El término resonancia se aplica comúnmente a cualquier situación en la que un sistema mecánico, estructural o acústico vibra en respuesta a una fuerza aplicada con la frecuencia natural del sistema o con una frecuencia próxima. La frecuencia natural es aquella a la que el sistema vibraría si lo desviáramos de su posición de equilibrio y lo dejáramos moverse libremente. Si se excita un sistema mediante la aplicación continuada de fuerzas externas con esa frecuencia, la amplitud de la oscilación va creciendo continuamente, y puede llevar a la destrucción del sistema.

El hundimiento del puente colgante de Tacoma Narrows en Puget Sound, Washington (EEUU), que tuvo lugar en 1940, fue causado por vibraciones con la frecuencia natural de la estructura producidas por el viento.

Muchos problemas graves de vibración en ingeniería son debidos a la resonancia. Por ejemplo, si la frecuencia natural de la carrocería de un automóvil es la misma que el ritmo del motor cuando gira a una velocidad determinada, la carrocería puede empezar a vibrar o a dar fuertes sacudidas. Esta vibración puede evitarse al montar el motor sobre un material amortiguador, por ejemplo hule o goma, para aislarlo de la carrocería.

Potencia absorbida

Analicemos la potencia absorbida a partir de la fuente externa en el movimiento armónico forzado. Para la potencia instantánea, aplicando $v = dx/dt$, se obtiene:

$$P = Fv = F_o \text{sen}(\omega_e t) x_o \text{cos}(\omega_e t + \varphi) \omega_e$$

$$P = F_o x_o \omega_e \text{sen}(\omega_e t) \text{cos}(\omega_e t + \varphi)$$

Interesa calcular la potencia media. Para ello hace falta resolver la integral

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

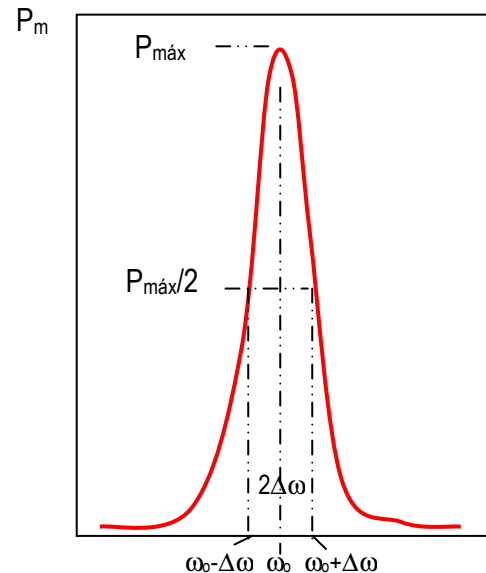
donde T representa un período de la oscilación (teorema del valor medio). Resolviendo esta integral se llega a:

$$P_m = \frac{1}{2} \frac{F_o^2}{m} \frac{\omega_e^2 / \tau}{(\omega_e^2 - \omega_o^2)^2 + (\omega_e / \tau)^2} \quad (1)$$

Analizando el denominador de esta expresión se ve que ahora se cumple, sin ninguna aproximación, que P_m es máxima cuando $\omega_e = \omega_o$. Estableciendo esta igualdad en (1) se obtiene:

$$P_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{F_o^2}{m} \tau$$

Se acostumbra definir el *ancho de la curva de resonancia* como el valor $2\Delta\omega$ que corresponde a la mitad de la potencia máxima absorbida (ver figura).



Relación entre τ y $\Delta\omega$

La potencia entregada se reduce a la mitad de la potencia máxima cuando el denominador en la expresión (1) se duplica. El denominador se duplica cuando en vez de ser $\omega_e^2 - \omega_o^2 = 0$ (potencia máxima) se cumple la relación

$$\omega_e^2 - \omega_o^2 = \omega_e / \tau .$$

Por otra parte, de la figura se ve que cuando P_m se reduce a la mitad, $\omega_e = \omega_0 \pm \Delta\omega$. Como $\omega_e^2 - \omega_0^2 = (\omega_e - \omega_0)(\omega_e + \omega_0)$, sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}(\omega_0 + \Delta\omega - \omega_0)(\omega_0 + \Delta\omega + \omega_0) &= (\omega_0 + \Delta\omega)/\tau \\ \Delta\omega(2\omega_0 + \Delta\omega) &= \omega_0/\tau + \Delta\omega/\tau\end{aligned}$$

Considerando sólo los casos en que las pérdidas son pequeñas, entonces $\Delta\omega/\tau \rightarrow 0$ (por ser $\Delta\omega$ pequeño y τ grande). Dividiendo la expresión anterior por ω_0 :

$$2\Delta\omega + \Delta\omega^2/\omega_0 = 1/\tau$$

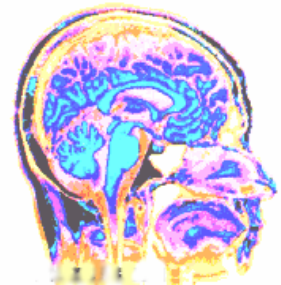
El término $\Delta\omega^2/\omega_0$ también se puede despreciar, ya que usualmente $\Delta\omega^2 \ll \omega_0$, obteniéndose finalmente que $2\Delta\omega \approx 1/\tau$ y, por tanto,

$$\tau = \frac{1}{2\Delta\omega}$$

Esta expresión nos dice que el tiempo de relajación es igual al inverso del ancho de la curva de resonancia, y también que *es posible medir las pérdidas de energía en un sistema resonante analizando el ancho de la curva de la potencia absorbida en función de la frecuencia*. Este método de medir relajaciones es muy utilizado en la tecnología, con diversos fines.

El *factor de calidad* (Q) de la curva de resonancia se define por la relación $Q = \omega_0/2\Delta\omega$. Este factor puede expresarse en función de τ a partir de la expresión anterior: $Q = \omega_0\tau$. Un tiempo grande de relajación (gran Q) significa que hay pocas pérdidas de energía, y también que la curva de resonancia es estrecha ($2\Delta\omega$ pequeño). El factor de calidad es una *cifra de mérito*, y se utiliza para comparar resonancias de diversos tipos.

Resonancia magnética. La imagen adjunta, obtenida por resonancia magnética nuclear (RMN) para diagnóstico, muestra el cerebro, las vías respiratorias y los tejidos blandos de la cara y cabeza de un adulto.



En la RMN resuena la frecuencia de precesión del momento magnético de los protones del agua con una señal externa de radiofrecuencia.

La imagen se construye midiendo la absorción de la radiación en muchos puntos e integrando posteriormente toda la información por medios de computación.

Ejemplo. La Q de una resonancia en un experimento de RMN en protones, a la frecuencia de 21 MHz, es 250.

a) ¿Cuál es el ancho de la curva de resonancia? b) ¿Cuál es el tiempo de relajación del protón en esas condiciones?

a) $Q = \omega_0/2\Delta\omega = f_0/2\Delta f$

$$2\Delta f = f_0/Q = 21/250 = \underline{0.084 \text{ MHz}}$$

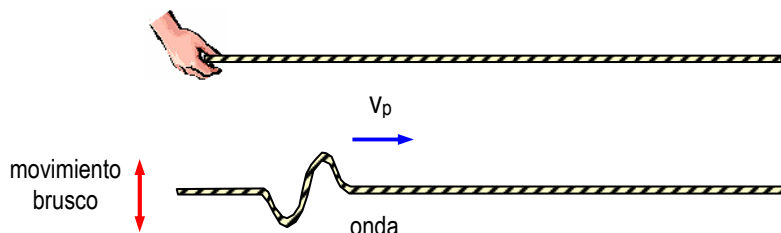
b) $\tau = 1/2\Delta\omega = 1/(2\pi \cdot 2\Delta f) = 1/(6.28 \times 0.084 \times 10^6) = \underline{1.89 \times 10^{-6} \text{ s}}$ (Durante estos 1.89 μs la energía del protón excitado disminuye e veces)

8.8 Ondas Mecánicas Transversales

Una onda mecánica es una *vibración que se propaga* en un medio determinado como, por ejemplo, la superficie de un líquido, el seno de un sólido, una cuerda, o el aire. Una característica común a todas las ondas es que se transmiten el movimiento y la energía a lo largo de una dirección *sin que haya transmisión neta de masa*.

Ejemplo. Impulso propagándose en una cuerda.

Cuando se tiene una cuerda sujeta por uno de los extremos y se agita bruscamente, en la cuerda aparece una onda que se propaga con cierta velocidad v_p , sin que la cuerda se suelte de la mano.



v_p es la *velocidad de propagación* de la oscilación. Se propaga la deformación, pero en la dirección de propagación no hay transferencia de masa, aunque sí se propaga energía.

Cuando se producen impulsos sucesivos, se obtiene un *tren de ondas* como el de la figura. Si la excitación en el eje y sigue la dependencia temporal de un MAS, cada segmento de la cuerda se moverá en el eje y y de acuerdo a esa dependencia temporal:

$$y = y_m \text{sen}(\omega t + \delta)$$

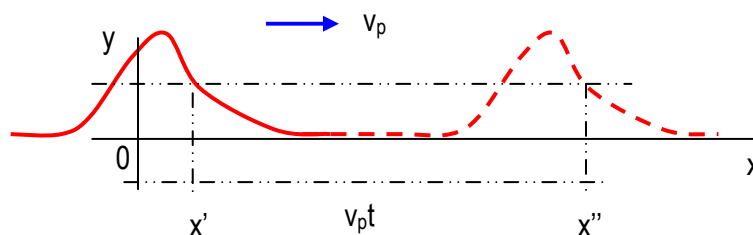
donde y_m representa el valor máximo de y (amplitud).



El tipo de onda aquí descrito es la onda *transversal*, donde la dirección de vibración es perpendicular a la dirección de propagación. También son posibles las ondas *longitudinales*, que serán analizadas más adelante.

Ecuación de Propagación de la Onda

Considere una onda que se propaga a lo largo del eje x , asumiendo que el medio de propagación es perfectamente elástico (cuerda elástica, superficie de un líquido, etc.). Significa asumir que no hay pérdidas de energía y la onda no se deforma durante su propagación.



Supongamos que para $t = 0$ la función $y = f(x)$ describe la forma de la onda con respecto al sistema de referencia considerado. Un valor particular de esa función sería $y = f(x')$ (ver figura).

Al transcurrir un intervalo de tiempo t , la onda habrá avanzado $\Delta x = v_p t$. Significa que en ese instante en el punto $x'' = x' + v_p t$ la elongación de la cuerda toma el valor $y = f(x')$. Sustituyendo x' en función de x'' en esta última expresión, es posible escribir

$$y = f(x'' - v_p t)$$

La relación anterior se debe cumplir cualquiera que sean los puntos x' y x'' considerados, siempre que estén separados por una distancia $v_p t$. Por tanto, omitiendo el supraíndice en x'' :

$$y = f(x - v_p t)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de la onda*.

Cualquier función f que presente un argumento del tipo $x - v_p t$ representa una onda que se propaga de izquierda a derecha. Note que para $t = 0$ se obtiene $y = f(x)$, que representa la forma de la onda en el instante inicial. Para cualquier t posterior representa la forma de la onda desplazada un intervalo $v_p t$ hacia la derecha a partir de la posición inicial.

Cuando la onda se desplaza de derecha a izquierda, se obtiene una expresión similar, pero con el signo cambiado; $f(x + v_p t)$. En general,

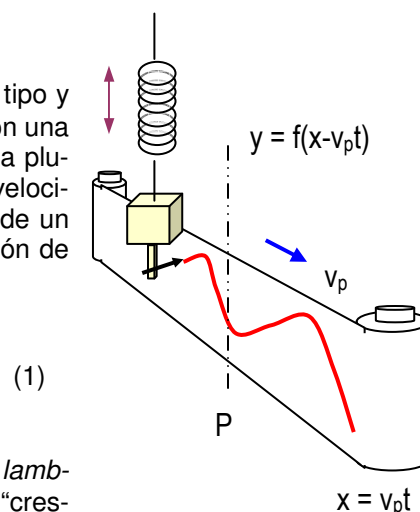
$$y = f(x \pm v_p t)$$

Note que la ecuación de la onda es una función de dos variables conjuntamente (posición y tiempo); $y = f(x, t)$.

8.9 Propagación de un M.A.S.

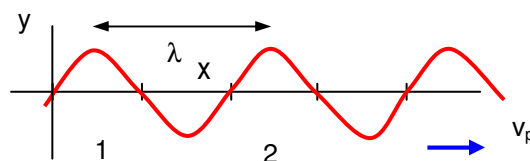
En la figura, el bloque oscila con un movimiento armónico simple del tipo $y = y_m \text{sen}(\omega t + \delta)$, y una cinta de papel se va enrollando en la derecha con una cierta velocidad v_p gracias a algún mecanismo auxiliar. El trazo de la pluma representa entonces una onda que se propaga a la derecha con velocidad v_p . Es posible demostrar que si la señal que se propaga es la de un MAS, como ocurre en este caso, entonces la ecuación de propagación de la onda $y = f(x \pm vt)$ toma la forma

$$y = y_m \text{sen}(kx \pm \omega t)$$



El parámetro $k = 2\pi/\lambda$ se denomina *número de onda* y la letra griega *lambda* (λ) representa la *longitud de onda* (distancia entre dos "valles" o "crestas" sucesivas de la onda); y_m es la *amplitud* de la onda.

De manera similar al MAS, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, donde la frecuencia f representa ahora el número de oscilaciones por unidad de tiempo *en un punto determinado de la onda*, y T el tiempo en que tarda *uno de esos puntos* en dar una oscilación completa.



En la figura anterior, cuando la deformación del medio avance desde el punto (1) al punto (2) y recorra una longitud de onda λ , el punto (1) habrá bajado y subido nuevamente a ocupar la misma posición que tenía al inicio (habrá transcurrido un período). Por tanto, es posible escribir

$$v_p = x/t = \lambda/T$$

y también, como $f = 1/T$;

$$v_p = \lambda f$$

También se acostumbra expresar esta relación sustituyendo en función de ω y k :

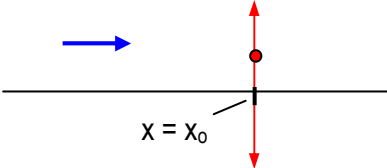
$$v_p = \omega/k$$

Para analizar el significado de la ecuación de la onda $y = y_m \text{sen}(kx - \omega t)$ es necesario hacer el análisis en dos etapas, ya que la función es de dos variables; $y = y(x,t)$. Para ello hay que mantener $t = \text{constante}$ ó $x = \text{constante}$ por separado.

En un instante determinado $t = t_0 = \text{constante}$, y entonces $y = y_m \text{sen}(kx - \phi)$.

Es decir, $y = f(x)$ solamente. La ecuación de la onda describe entonces la *forma* de la onda en ese instante particular. Equivale a tomar una "foto" de la onda (ver figura anterior). Por el contrario, cuando se fija un valor determinado de x , por ej., $x = x_0$, entonces

$$y = y_m \text{sen}(\omega t + \phi)$$



y se obtiene la descripción de un MAS en el punto x_0 considerado.

No es posible representar gráficamente ambas dependencias a la vez. Sólo es posible hacerlo en forma animada. Para tener una imagen de la onda, es necesario representarse mentalmente la onda como una integración de ambas figuras donde todos los puntos se encuentran a la vez en movimiento.

Aunque en la onda no hay transmisión de masa, sí hay transmisión de energía. No existe una expresión general para la energía que es capaz de transmitir la onda. Hay que determinarla para cada caso particular. Por ejemplo, para una onda que se propaga en una cuerda, la potencia media transmitida tiene la forma

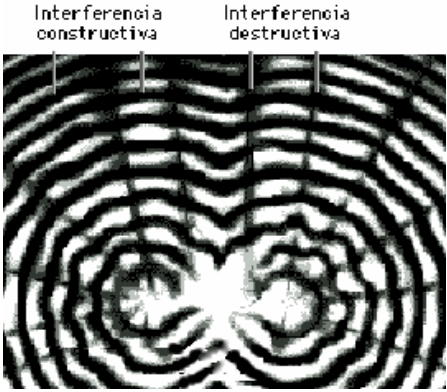
$$P = 2\pi^2 y_m^2 f^2 v_p \mu$$

donde μ representa la masa por unidad de longitud de la cuerda.

8.10 Interferencia

El término *interferencia* se utiliza para designar el fenómeno que tiene lugar cuando *dos o más trenes de ondas se superponen en una misma región del espacio*.

A título de ejemplo, considere la siguiente fotografía, donde dos mecanismos excitan ondas de igual frecuencia y similar amplitud cerca del centro de una bandeja con agua.

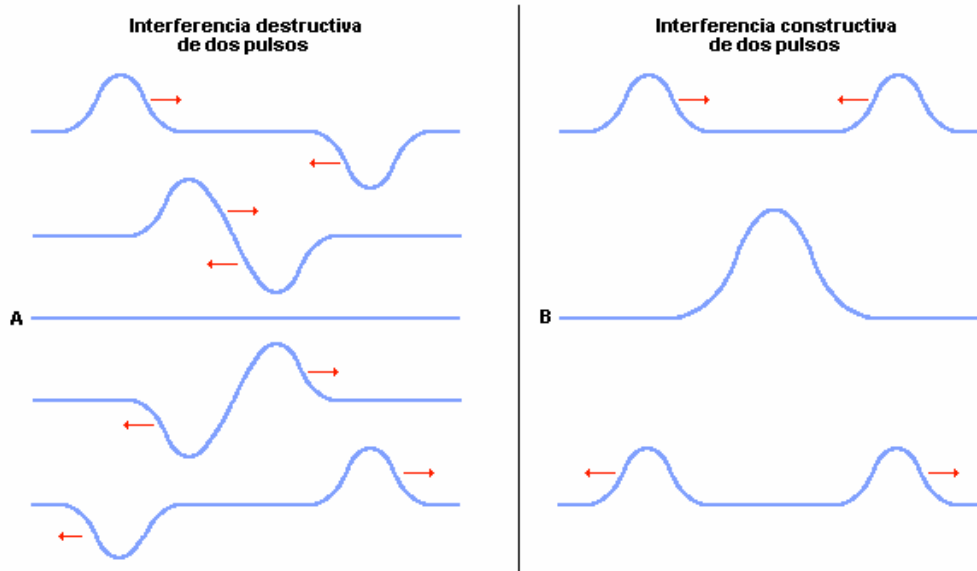


La iluminación se ha escogido adecuadamente para resaltar los máximos y mínimos de interferencia en las ondas que se forman en la superficie del líquido.

Interferencia de fuentes puntuales. El diagrama de interferencias de la figura anterior se formó moviendo dos varillas rítmicamente arriba y abajo en una bandeja de agua. Se pueden observar efectos similares al meter y sacar del agua dos dedos u observando a dos patos nadando en un estanque cerca uno de otro. Las ondas procedentes de una de las fuentes puntuales (la varilla, el dedo o el pato) interfieren con las que proceden de la otra fuente. Si dos crestas llegan juntas a un punto, se superponen para formar una cresta muy alta; si dos valles llegan juntos, se superponen para formar un valle muy profundo (interferencia constructiva).

Los anillos brillantes y oscuros son zonas de interferencia constructiva. Si la cresta de una fuente llega a un punto a la vez que el valle de la otra, se anulan mutuamente (interferencia destructiva). Las líneas oscuras radiales son zonas de interferencia destructiva.

Los tipos de interferencia constructiva y destructiva se representan esquemáticamente en la figura siguiente:



Si la amplitud de los pulsos es exactamente la misma, la elongación puede llegar a anularse totalmente en la región de interferencia, como ocurre en el caso (A). Se encuentra en la práctica que, *si la amplitud de la onda no es muy grande*, durante la interferencia se cumple el *principio de superposición*.

El principio de superposición establece que la amplitud resultante en cada punto de la región que interfiere cumple la relación

$$y = y_1 + y_2$$

donde y_1, y_2 representan las amplitudes de las ondas correspondientes.

Además, *a los efectos de la propagación, cada onda se comporta como si la otra no estuviera presente*. Significa que, a pesar de la interferencia, en lo que se refiere a la propagación del movimiento, cada onda no perturba el movimiento posterior de la otra.

Con el fin de ejemplificar lo anterior, considere dos ondas que se propagan a lo largo de una dirección dada:

$$y_1 = y_{m1} \text{sen}(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1)$$

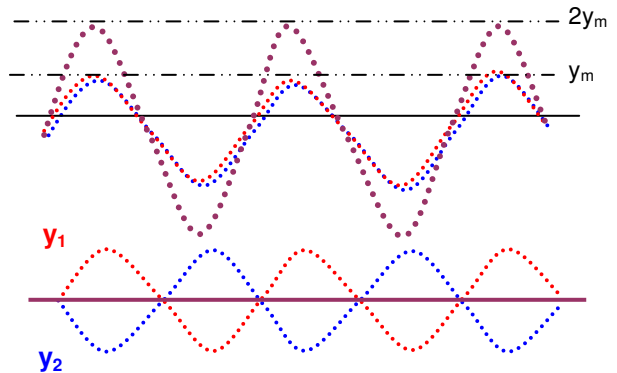
$$y_2 = y_{m2} \text{sen}(k_2 x - \omega_2 t + \delta_2)$$

Al sumar $y_1 + y_2$ se obtienen resultados muy diferentes en dependencia de las relaciones k_1/k_2 y ω_1/ω_2 . A continuación se muestra un ejemplo sencillo.

Considere $y_{m1} = y_{m2} = y_m$, $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\delta_2 = 0$, $\delta_1 = \delta \neq 0$. Entonces,

$$y_1 = y_m \text{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

$$y_2 = y_m \text{sen}(kx - \omega t)$$



Sumando $y_1 + y_2$, tomando en cuenta que $\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen}\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$ y agrupando términos, se obtiene:

$$y = \{2y_m\cos(\delta/2)\}\text{sen}(kx-\omega t+\delta/2)$$

a) Si además $\delta = 0$, como $\cos(\delta/2) = 1$:

$$y = 2y_m\text{sen}(kx-\omega t).$$

Se obtiene una onda resultante con la misma frecuencia y longitud de onda (ω, k) y con el doble de amplitud.

b) En el caso que $\delta = \pi$, $\cos(\pi/2) = 0$, y no hay oscilación. Como resultado de la suma de las dos ondas no obtengo movimiento alguno (línea recta en la figura).

8.11 Ondas Longitudinales

La onda longitudinal se caracteriza porque la dirección de vibración es paralela a la dirección de propagación. Un ejemplo típico de onda longitudinal es el de la propagación del sonido en el aire. En la figura se representan una onda longitudinal junto a una transversal para su comparación.

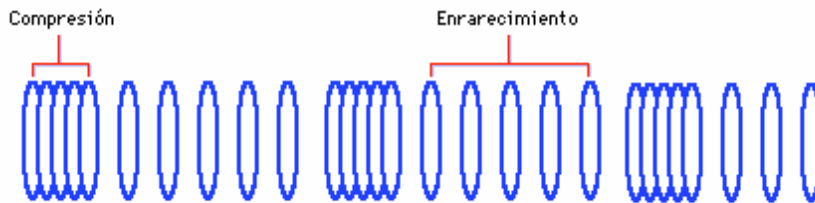


Figura 1: onda longitudinal



Figura 2: onda transversal

Sonido. Sensación psicofisiológica originada al interaccionar la vibración del aire con la membrana timpánica, cuando la frecuencia de las oscilaciones varía entre 20 y 20 000 Hz aproximadamente.

En el caso del sonido, oscilan las moléculas de aire (ordenadas en capas) alrededor de sus posiciones de equilibrio. La elongación de una capa cualquiera a partir del equilibrio viene dada por una expresión similar a la de la onda transversal:

$$y = y_m\text{sen}(kx-\omega t).$$

Se demuestra que también es posible considerar la onda como una onda de presión:

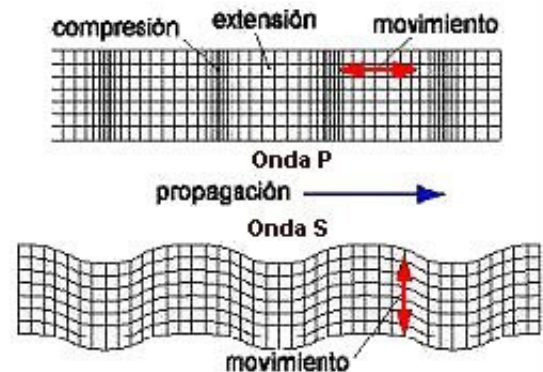
$$p = p_m\text{sen}(kx-\omega t)$$

donde $p_m = \rho v_p^2 y_m$ y ρ es la densidad del medio. Las ondas longitudinales se pueden presentar tanto en gases como en sólidos y líquidos, mientras que las transversales sólo se pueden presentar en medios sólidos. La velocidad de propagación es característica del medio considerado (ver tabla).

Medio	v_p (m/s)
caucho	54
aire	336
agua	1450
aluminio	5100
granito	6000

Ondas Sísmicas. Son ondas transversales y longitudinales que se radian cuando un sismo tiene lugar. Hasta un 10% de la energía acumulada se puede disipar en forma de ondas sísmicas, que se propagan en todas direcciones a través del planeta, y no sólo en su superficie.

Existen dos tipos de ondas sísmicas. Las ondas primarias P son ondas longitudinales de compresión y extensión; su velocidad de propagación varía entre 1.5 y 8 km por segundo en la corteza terrestre. Las ondas secundarias S son ondas transversales, y viajan siempre a una velocidad del 60-70% relativa a la de la onda P.



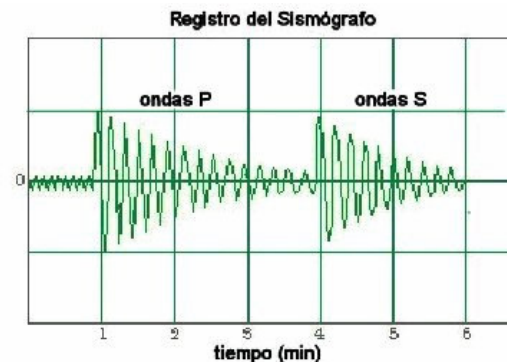
Las ondas P hacen oscilar el terreno en la misma dirección en que se van propagando. Las ondas S lo mueven en dirección perpendicular a la dirección de propagación (ver figura). La diferencia de velocidad e intensidad entre los dos tipos de ondas permite a los sismólogos determinar rápidamente la distancia hasta el sismo desde cualquier lugar. Para ello, basta medir el intervalo de tiempo que tardan ambos tipos de ondas en llegar hasta el detector (sismógrafo).

Ejemplo: Una velocidad típica para las ondas S es de 4.5 km/s, y para las P de 8.0 km/s. Un sismógrafo que registra las ondas sísmicas capta la primera onda P proveniente de un sismo a unos 3.0 minutos antes que la primera onda S. Suponiendo que las ondas viajan en línea recta, ¿a qué distancia tuvo lugar el terremoto?

$$t_P = x/v_P ; t_S = x/v_S$$

$$\Delta t = t_S - t_P = x(1/v_S - 1/v_P)$$

$$x = \frac{\Delta t}{\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P}} = \frac{3.0 \times 60}{\frac{1}{4.5} - \frac{1}{8.0}} = 1855.7 \text{ km}$$



Infrasonido y ultrasonido

Cuando la frecuencia cae por debajo de 20 Hz, nos encontramos en la región de los tonos ultrabajos o *infrasonido*. Por lo general, a pesar de ser inaudibles, estas frecuencias son dañinas para el organismo. Cuando las intensidades son grandes pueden originar dolores de cabeza, náuseas y sensación de temor.

Las frecuencias mayores de 20 000 Hz corresponden a los tonos superagudos o *ultrasonido*, de amplia aplicación en la tecnología contemporánea (alarmas electrónicas, sensores, equipos de diagnóstico). Entre otras muchas aplicaciones, la *ecografía de ultrasonido* se utiliza para controlar el crecimiento,

desarrollo y bienestar del feto, y también se puede emplear para comprobar la fecha de la concepción. A diferencia de los rayos X, la ecografía es completamente segura durante el embarazo, sin riesgo para la madre ni para el bebé.

El umbral de frecuencia de algunos animales es mayor que el de los humanos; los perros, por ejemplo, son capaces de escuchar el sonido a frecuencias más altas que las personas.

Pulsación. Cuando interfieren dos ondas de la misma amplitud y frecuencias ligeramente diferentes, se producen variaciones o pulsos en la amplitud de la oscilación, que pueden tener una frecuencia mucho menor que la de las ondas que le dan origen, con períodos del orden de segundos.

En el caso del sonido, el oído es capaz de percibir pulsaciones de hasta 6 ó 7 por segundo.

